

1406

William

UNIVERSITA KARLOVA V PRAZE

FAKULTA FILOSOFICKÁ

Prolegomena k faktorové analýze

PhDr. Pavel Říčan, CSc., RNDr. Olga Hampejsová

Státní pedagogické nakladatelství
Praha

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTEN LENOX TILDEN FOUNDATION

1891

1891

UNIVERSITA KARLOVA V PRAZE

FAKULTA FILOSOFICKÁ

Prolegomena k faktorové analýze

PhDr. Pavel Říčan, CSc., RNDr. Olga Hampejsová

1972

**Státní pedagogické nakladatelství
Praha**

PROLEGOMENA K FAKTOROVÉ ANALÝZE

O b s a h	Strana
Úvod	5
I. Předběžná orientace	7
A) Kvantifikace v psychologii osobnosti	7
B) Korelace	11
C) Korelace a faktory (příklad)	17
D) Smysl faktorové analýzy	20
II. Faktorový model	24
A) Testy jako lineární kombinace faktorů	24
B) Specifikační rovnice a korelace mezi testy	28
C) Rozklad variance a typy faktorů	30
D) Geometrické vyjádření faktorového modelu	34
E) Faktory vyšších řádů	38
III. Extrakce faktorů z korelační matice	42
A) Centroidní metoda (příklad)	42
B) Další metody extrakce	48
C) Odhad komunalit a stanovení počtu faktorů	52
D) Dwyerova extenzní analýza	56
IV. Rotace faktorů	58
A) Možnost nerotovat	58
B) Úvodní příklad	58
C) Transformační matice	61
D) Pojem jednoduché struktury	61
E) Orthogonální jednoduchá struktura: cvičení	63
F) Faktory a referenční vektory	69
G) Rotoplot	72
H) Automatická rotace do jednoduché struktury	79
J) Rotace podle hypotézy	82
K) Reliabilita a velikost faktorových zátěží	86
V. Faktorová skóre	88

	Strana
VI. Faktorové projekty	91
A) Typy dat pro faktorování	91
B) Hypotézy ve faktorové analýze	94
C) Faktorový projekt v užším smyslu	99
D) Strategie faktorového výzkumu	108
Závěr	112
Výsledky cvičení	132
Komentovaná bibliografie	114
Významy soustavně používaných symbolů	113
Dodatek: Nejdůležitější maticové operace ve faktorové analýze	115

Ú v o d e m

Faktorová analýza je matematicko-statistická metoda. Je možno jí použít v nejrůznějších vědních oborech. Avšak od počátku svého vývoje je tato metoda spjata s psychologií osobnosti. Toto sepětí je neobvykle úzké. Ve své primitivní podobě byla faktorová analýza vytvořena psychologem Ch. Spearmanem a použita ke klasifikaci rozumových schopností. Její podstatné zdokonalení v třicátých letech je opět dílem psychologa - L. L. Thurstona. Ačkoliv se jí v současné době používá v různých oborech - v medicíně, biologii i meteorologii atd., přece jen je stále aplikována hlavně v psychologii a především v psychologii osobnosti. A ti, kteří v nedávné době nejvíce přispěli a dosud přispívají k rozvoji faktorové analýzy (zejména L. R. Tucker a R.B. Cattell), se rovněž cítí psychology.

Pro psychologii osobnosti má faktorová analýza zvláštní důležitost; je možno říci, že zde přerostla z matematicko-statistické metody v celou svéráznou metodologii, ve významný výzkumný a - podle některých vysoce ceněných autorů - dokonce v teoretický směr. Například Guilfordova učebnice psychologie osobnosti (1959) je zcela založena na této metodě a výsledcích, kterých bylo s jejím použitím dosaženo. Také Cattell a Eysenck bývají označováni za "faktorové teoretiky" osobnosti.

Výpočetní procedury, používané ve faktorové analýze, jsou dnes - zásluhou samočinných počítačů - relativně jednoduchou záležitostí. Používání této metody nezůstává proto omezeno - jako tomu bylo dříve - na úzký okruh "zasvěcených", kteří jsou seznámeni se všemi jejími zvláštnostmi a úskalími. Tím většího významu nabývá porozumění metodologickým základům faktorové analýzy, schopnost správně naplánovat výzkumný projekt, ve kterém se má faktorové analýzy použít, a schopnost přiměřeně interpretovat výsledky faktorové analýzy, ke kterým jsme došli sami nebo se kterými se setkáváme v pracích jiných autorů. Interpretace výsledků faktorové analýzy je totiž mnohem náročnější, než je tomu u většiny matematicko-statistických metod. Zatímco například výsledek srovnání dvou průměrů dovede interpretovat i ten, kdo ví o statistice velmi málo (například řekneme-li, že ženy jsou v průměru výšněji než muži) - výsledky faktorové analýzy není bez hrubého zkreslení možno vyjádřit obecně srozumitelnou řečí.

Posláním tohoto textu není být učebnicí v tom smyslu, že by jeho prostu-

dování čtenáři umožnilo samostatně provádět faktorovou analýzu. Počet psychologů a odborníků jiných oborů, kteří budou faktorové analýzy soustavně aktivně používat, zůstane v dohledné době omezený; půjde vesměs o pracovníky schopné studovat zahraniční literaturu, ve které je k dispozici řada výtečných obsáhlých učebnic.

Chceme především čtenáři umožnit, aby pronikl do logiky faktorové analýzy a tím i do teorie vlastností, která je na ní založena, tak aby mohl s porozuměním číst empirické studie i teoretické úvahy v psychologii osobnosti, případně v jiných oborech. Psycholog s dobrou všeobecnou metodologickou přípravou by měl být po prostudování těchto prolegomen schopen vypracovat méně náročný projekt s použitím faktorové analýzy, za pomoci matematického statistika jej realizovat a na přijatelné úrovni interpretovat jeho výsledky.

Naše prolegomena kladou malé nároky na předchozí matematickou přípravu. Zcela postačí znalost středoškolské matematiky a prostudování kteréhokoliv úvodu do matematické statistiky.

Kapitola I. PŘEDBĚŽNÁ ORIENTACE

A) Kvantifikace v psychologii osobnosti

1. Pojem kvantity

Faktorová analýza pracuje s kvantitami. Pomůže nám zamyslet se nejprve nad tím, jak se v psychologii - a ve vědě vůbec - dospívá ke kvantitám a jakého druhu tyto kvantity jsou.

Kategorie kvantity je pro normálního dospělého člověka v naší kultuře zdánlivě naprosto samozřejmá. Teprve studium kognitivního vývoje dětí, podobně jako studium myšlení a jazyka primitivních kultur, nám ukazuje, jak dlouhá je cesta k této abstrakci.

Nejnadněji chápeme kvantity, týkající se viditelných objektů, například kvantitu fyzikální velikosti a rychlosti pohybu (jeden automobil je větší a rychlejší než druhý).

V psychologii se někdy dostáváme ke kvantitám obtížněji. Je například nesnadné kvantifikovat a měřit city, intenzitu různých prožitků apod. Ale už v běžné řeči se setkáváme s psychologickou kvantifikací. Řekneme-li například: "Jiří je chytřejší než Ota", je v tomto výroku už obsaženo kvantitativní srovnání. Předpokládáme kvantitativní veličinu "chytrost", která je u Jiřího větší než u Oty.

Všimněme si nyní předpokladu, který jsme museli udělat, abychom mohli říci, že Jiří je chytřejší než Ota. Museli jsme předpokládat, že chytrost Jiřího a Oty je stejného druhu. To je předpoklad kvalitativní identity té vlastnosti, jejíž míru u různých lidí srovnáváme. Cítíme ovšem, že Jiří je možná chytrý jiným způsobem než Ota, že jeho intelekt má jiné silné stránky a jiné slabiny. Avšak při kvantitativním srovnávání jsme museli abstrahovat od kvalitativních rozdílů tohoto druhu.

Při srovnávání fyzikální délky předmětů přijímáme předpoklad kvalitativní identity tak samozřejmě, že si to ani neuvědomujeme. Jde ostatně o nižší abstrakci, opírající se o přímé nazření. Nenapadne nás, že by délka jednoho předmětu mohla mít jinou kvalitativní povahu než délka druhého předmětu. Tentýž předpoklad musíme však dodržovat i v psychologii, cheme-li matematicko-statisticky operovat s vlastností "chytrost" nebo s kteroukoli jinou vlastností.

Druhým předpokladem, který kvantifikace v psychologii osobnosti (i v jiných oborech) vyžaduje, je předpoklad univerzálnosti vlastností. Podle tohoto předpokladu všichni jedinci v populaci, o které uvažujeme (všechny české děti, všechna velkoměsta, všichni psi atd.) mají každou zavaděnou vlastnost. Například všichni lidé jsou v určité míře chytří: někteří značně, někteří průměrně, někteří v nepatrné míře, případně v nulové míře. U všech však musí být - aspoň teoreticky - možno tuto vlastnost kvantitativně vyjádřit.

2. Druhy stupnic

V teorii měření, jež je základem faktorové analýzy, se obvykle rozeznávají tři druhy stupnic (škál), které se liší podle toho, jaké matematické operace umožňují.

(a) Pořadové stupnice: O pořadové stupnici mluvíme tehdy, můžeme-li zjišťovat pouze pořadí předmětů či lidí vzhledem k určité vlastnosti. Tak jako jsme "seřadili" Jiřího a Otta podle chytrosti, můžeme seřadit libovolný počet jedinců, aniž musíme vědět, jaké vzdálenosti mezi nimi jsou na myšlené stupnici chytrosti. Takovouto stupnici představuje například "žebříček" tenistů nebo šachistů určitého klubu. Zde je v povaze věci, že nemůžeme dost dobře určit, o kolik je první lepší než druhý nebo - obecněji - jaká je "vzdálenost" mezi kterýmikoli dvěma sportovci. Jindy můžeme sice takové rozdíly vyjádřit v centimetrech (při skoku vysokém), ale není to mnoho platné, protože velikost těchto rozdílů neodpovídá rozdílům ve sportovní hodnotě výkonů. Rozdíl mezi výkonem 160 cm a 170 cm je zřejmě jiný než rozdíl mezi 210 a 220 cm!

(b) Intervalové stupnice: O intervalových stupnicích mluvíme, můžeme-li smysluplně číselně vyjádřit rozdíly mezi jednotlivými hodnotami. V případě skoku vysokého můžeme tyto rozdíly zhruba vyjádřit pomocí bodovacích tabulek, které byly k tomu účelu sestaveny a které umožňují srovnávat i hodnotnost výkonů v různých atletických disciplínách. Smysluplnou intervalovou stupnicí je také stupnice teploměru: má totiž zpravidla smysl říci, že rozdíl mezi 10 a 20 stupni Celsia je stejný jako rozdíl mezi 80 a 90 stupni.

Na intervalové stupnici je možno provádět sčítání a odčítání, jak vyplývá už z uvedeného příkladu s teploměrem. To umožňuje výpočet průměru a rozptylu (zatímco průměr na žebříčku šachistů je nesmyslný a číslo vyjadřující průměrný výkon skokana do výšky je málo užitečné).

(c) Poměrové stupnice: Za poměrové označujeme takové stupnice, na kterých má smysl objekty nejen seřadit a stanovit velikosti rozdílů, nýbrž také vyjadřovat vztahy mezi nimi číselnými poměry. Má například smysl říci, že dva

milimetry se mají ku pěti milimetrům jako čtyři milimetry k deseti milimetrům (nebo čtyři kilometry k deseti kilometrům). Je možno dělit a násobit, například má smysl říci, že jedna loď uveze třikrát tolik tun jako druhá. Se stupni na teploměru zřejmě nemá smysl podobné operace provádět. Není například možno říci, že při dvaceti stupních je dvakrát tepleji než při deseti stupních.

Poměrové stupnice mají vždy přirozenou nulu, tj. je možný výskyt nulové hodnoty. Existence nulové hodnoty není však sama o sobě zárukou, že jde o poměrovou stupnici.

Na poměrové stupnici jsou možné všechny operace, které jsou možné na stupnici intervalové a pořadové. Je možno říci, že poměrová stupnice tyto dvě stupnice implikuje, zahrnuje.

3. Realizace měření v psychologii osobnosti

Problémy faktorové analýzy nám budou bližší, probereme-li aspoň hlavní druhy z rozmanitosti konkrétních kvantifikačních operací, které se vyskytují v psychologii osobnosti.

(a) Měření času: Čas můžeme měřit při zjišťování schopností (čím rychlejší intelektuální nebo motorický výkon, tím vyšší schopnost) nebo při výzkumu motivace (doba rozhodování je tím delší, čím silnější je konflikt) apod.

(b) Měření velikosti reakce: Můžeme měřit velikost motorické nebo vegetativní reakce při podnětu budícím leknutí (silné bouchnutí) nebo rozpaky (indiskrétní dotaz při stresovém rozhovoru) apod.

(c) Počítání prvků (u některých výkonů): Můžeme zjišťovat počet slov začínajících určitým písmenem, která proband řekne za určitý čas, počet předmětů, které si zapamatoval v Kimově hře apod.

(d) Frekvence výskytu určitého jevu: tepová frekvence, frekvence určitého neurotického tiků, frekvence slova "já" v řeči apod.

(e) Bodový systém: Tato kvantifikační operace je v psychologii osobnosti velmi běžná. Proband je vystaven řadě podnětů (testových úloh, zájmových otázek apod.), přičemž se zjišťuje počet správných odpovědí (v testech schopností), počet odpovědí symptomatických pro určitou povahovou vlastnost (např. submisivnost) apod. V přísném smyslu je ovšem kvantifikační operací už to, že za správné vyřešení určitého úkolu udělíme bod, protože tím jsme se dostali od jevu (správné řešení) k jeho číselnému ohodnocení.

Všechny uvedené operace vedou ke kvantitám, které je možno seřadit podle velikosti (vlastnost pořadové stupnice). Srovnatelnost intervalů (vlastnost intervalové škály) je ovšem sporná. Jestliže například tři osoby dosáhly v určitém testu 29, 25 a 21 bodů, nevyplývá z toho, že rozdíl mezi první a druhou je stejný jako rozdíl mezi druhou a třetí. Tím méně ovšem má smysl říci, že jestliže někdo nedosáhl v určitém testu ani jednoho bodu, má dotyčnou schopnost v nulové míře ve smyslu přirozené nuly poměrových stupnic.

4. Standardní skóre

Kvantity získané uvedenými nebo jinými operacemi převádíme obvykle na takzvaná standardní skóre. Tento převod má dvojí smysl:

(a) Konstrukce pseudointervalové stupnice: Ve faktorové analýze, podobně jako v psychometrii, činíme zpravidla následující předpoklad: "Kdybychom mohli měřit rozdíly mezi jednotlivci na intervalové škále, obdrželi bychom normální rozložení individuálních skóre" (Magnusson). Tento předpoklad vychází ze zkušenosti, že mnohé fyzikálně měřitelné vlastnosti předmětů a lidí (např. tělesná výška) mají přibližně normální (Gaussovo) rozložení. Také psychofyzika v některých případech potvrdila, že psychologické veličiny bývají normálně rozloženy. Jestliže tedy transformujeme získaná skóre tak, abychom obdrželi normální rozložení (používá se k tomu McCallovy plošné transformace), můžeme s určitou pravděpodobností předpokládat, že se přiblížíme intervalové stupnici. Kdyby byly naše stupnice silně odlišné od intervalových, vedlo by použití faktorové analýzy k nepřesným, ne-li dokonce nesmyslným výsledkům. (Toto nebezpečí můžeme ovšem jen zřídka zcela vyloučit, zvláště u nevhodně konstruovaných testů.)

(b) Nulový průměr a jednotková variance: Každou proměnnou veličinu můžeme snadno převést na standardní skóre s nulovým průměrem a jednotkovou variancí, odečteme-li od každé individuální hodnoty průměr a dělíme-li výsledek směrodatnou odchylkou daného rozložení. To je standardní skóre v užším slova smyslu; v širším slova smyslu se za standardní skóre považují steny, staniny, IQ-formát a další stupnice, s nimiž se pracuje v psychometrii. Tato transformace nemění ani tvar rozložení, ani pořadí jednotlivců, ani korelace mezi proměnnými a ovšem ani výsledky faktorové analýzy. Protože odvozování mnoha vztahů a vzorců se podstatně zjednoduší předpokladem nulového průměru a jednotkové variance, zavedeme tento předpoklad pro celý další text.

Cvičení

1. Které předpoklady činíme při kvantifikaci v psychologii osobnosti a jaký je mezi nimi vztah?

2. Můžeme sčítat jablka a hrušky?
3. Které matematické operace umožňuje pořadová stupnice, intervalová stupnice a poměrová stupnice?
4. Najděte několik příkladů výrazně pořadových stupnic!
5. Je objem tělesa v m^3 vyjádřen na poměrové stupnici?
6. Najděte další příklady na jednotlivé druhy konkrétních kvantifikačních operací v psychologii i mimo ni!
7. Proč nazýváme psychometrické stupnice "pseudointervalové"?
8. Co je standardní skóre v užším smyslu a v širším smyslu?

B) Korelace

Základním stavebním kamenem faktorové analýzy je korelační vztah. Čtenář se bezpochyby s pojmem korelace setkal, zná jeho význam a snad i dovede vypočítat některé z korelačních koeficientů. Přesto však bude asi namístě, začneme-li "od Adama".

1. Pojem korelace

Korelací rozumíme matematicko-statistický vztah mezi dvěma proměnnými (veličinami), který bychom mohli nazvat "souběžnost kvantitativní proměnlivosti".

Uvedme příklad. V jedné školní třídě jsme provedli desetiminutový test zjišťující pohotovost a chápavost pro slovní pokyny (test "Instrukce") a didaktický test z češtiny. Tak jsme získali od každého žáka dva údaje: počet správných řešení v testu "Instrukce" a počet správných odpovědí v didaktickém testu. Údaje jsou zachyceny v tabulce 1, str. 12.

Proměnné veličiny, o jejichž vztah nám jde, jsme nazvali "Instrukce" a "Čeština". O korelaci mezi nimi je ovšem možno mluvit jen tehdy, patří-li dvojice hodnot nějakým způsobem k sobě. V našem případě tomu tak je. Příslušné hodnoty k sobě patří proto, že pocházejí od téhož jedince. Jde o interindividuální proměnné, to znamená, že jejich hodnoty se mění od jednotlivce k jednotlivci. Ptáme se, do jaké míry jsou tyto dvě veličiny ve své proměnlivosti spjaty, do jaké míry se společně, paralelně mění (kolísají, varíují) od individua k individuu. (Existují také intraindividuální proměnné a intraindividuální korelace, například mezi tělesným zdravím a duševní pohodou u téhož člověka v různých časových úsecích.)

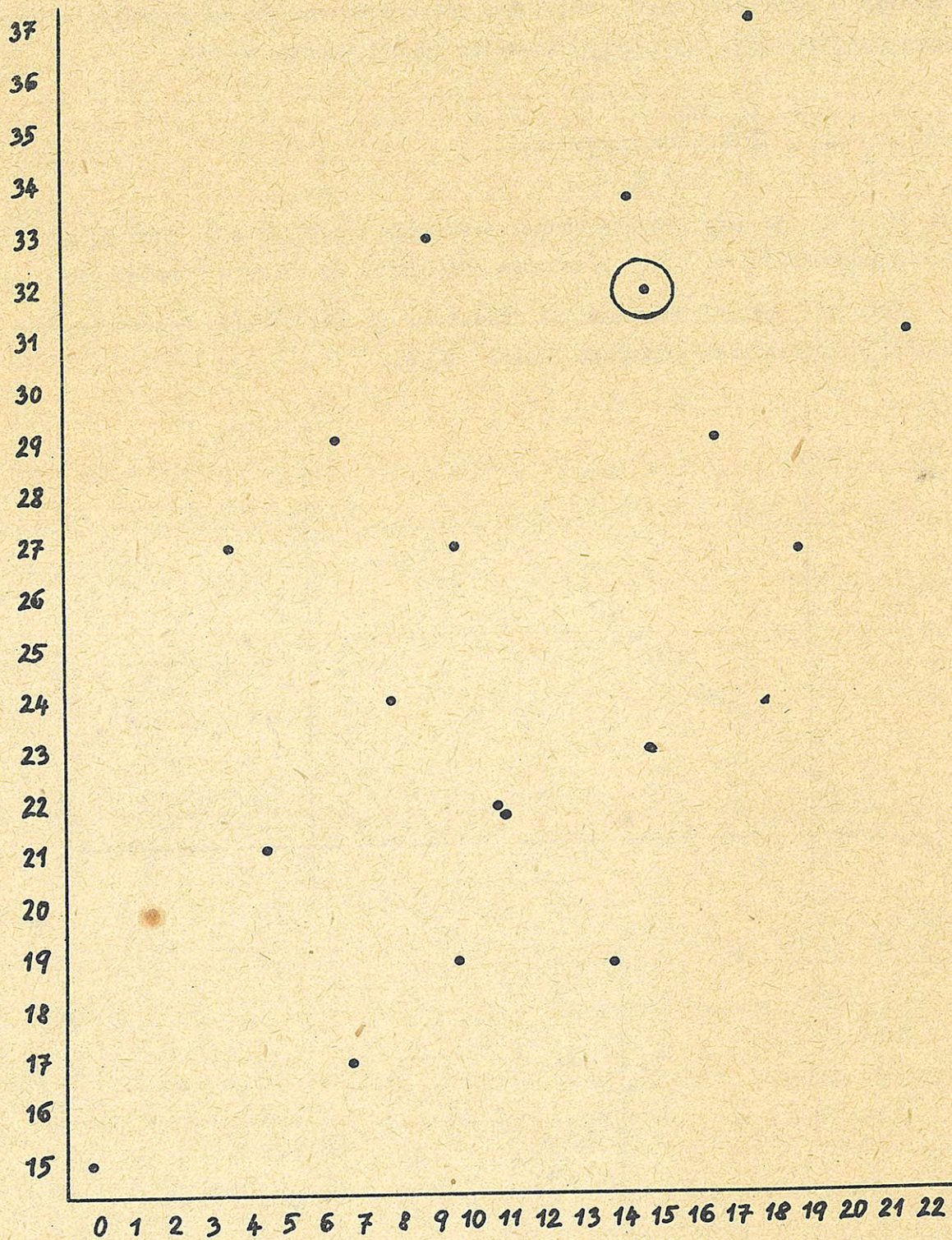
Tabulka 1. Výsledky 20 žáků v psychologickém a didaktickém testu

Žák	"Instrukce"	"Čeština"
J.K.	15	32
O.H.	10	19
V.B.	4	27
B.N.	20	27
Z.L.	15	23
A.C.	10	27
E.K.	22	31
M.B.	7	17
C.L.	18	37
T.U.	11	22
R.Š.	14	19
F.T.	9	33
V.S.	0	15
E.P.	17	29
Z.J.	5	21
G.D.	18	24
A.B.	14	34
L.M.	7	29
E.O.	11	22
Y.Z.	8	24

Tabulku 1. můžeme převést do formy grafu tak, že zvolíme pro proměnnou "Instrukce" vodorovnou osu a pro proměnnou "Čeština" svislou osu. Každá žák je v tomto grafu reprezentován bodem, jehož souřadnice odpovídají výkonům v použitých testech. Například žák J.K. je reprezentován bodem, jehož souřadnice jsou 15 a 32 a který je na obr. 1, str. 13, zakroužkován.

Z grafického znázornění vidíme na první pohled to, čeho jsme si v tabulce snad ani nevšimli, totiž že mezi "Instrukcemi" a "Češtinou" je výrazný vztah: čím lepší výsledek v jednom testu, tím také - i když s výjimkami - lepší výsledek v druhém testu.

Korelace mezi "Instrukcemi" a "Češtinou" je právě tento vztah, který je v tabulce vyjádřen stejně přesně, i když méně názorně než v grafu.



Obr. 1. Grafické znázornění korelačního vztahu (viz tab.1.)

2. Korelační koeficienty

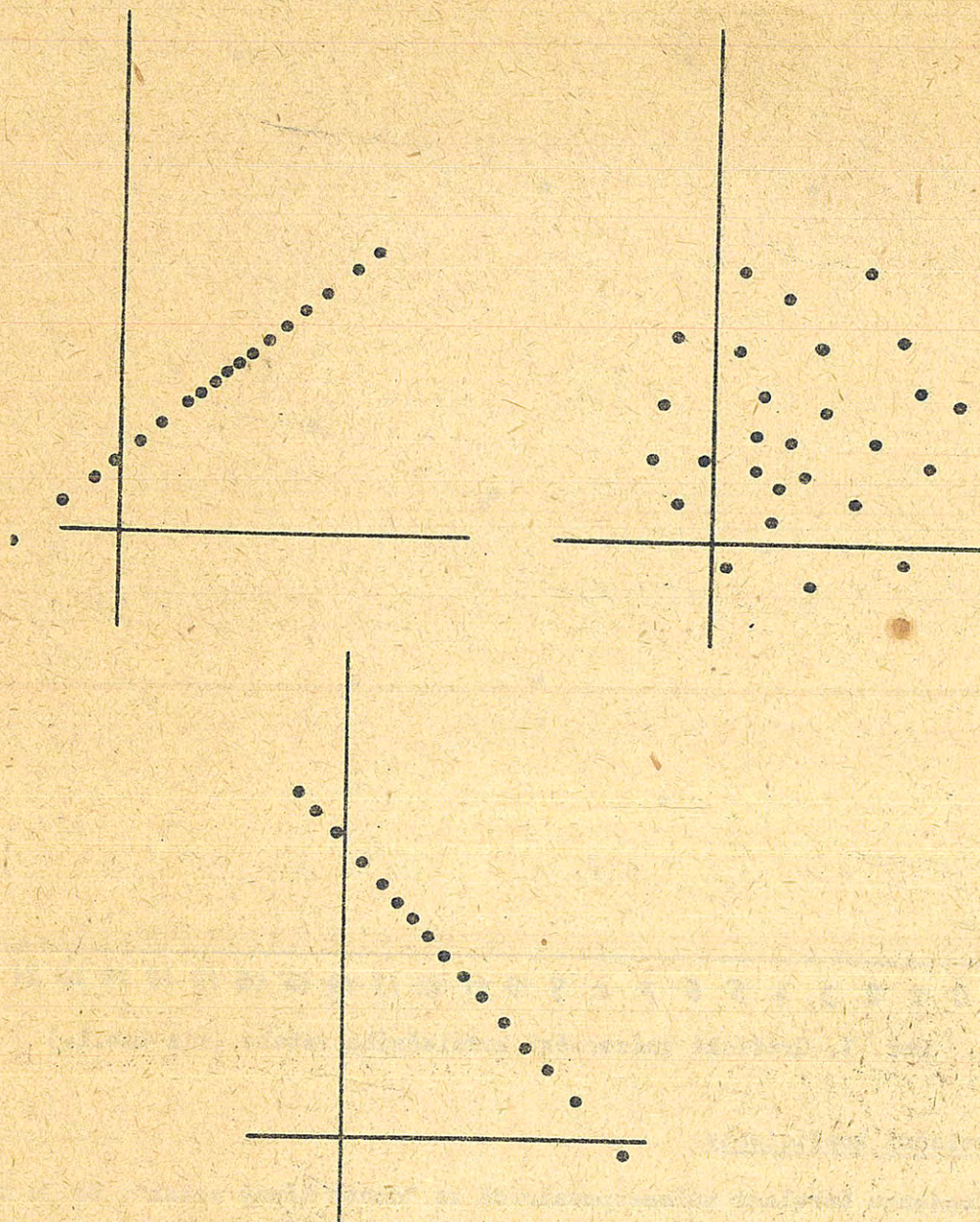
Uvedenou korelaci můžeme považovat za "dostí těsný vztah". To je ovšem příliš neurčitě řečeno. Potřebujeme index, který by umožnil těsnost tohoto vztahu stručně číselně vyjádřit. Takových indexů byla navržena celá řada.

Nazýváme je korelační koeficienty. Pro faktorovou analýzu má největší význam Pearsonův korelační koeficient, který se vypočítá podle vzorce

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N s_x s_y} \quad (1),$$

kde x_i a y_i je vždy dvojice hodnot patřících k sobě, $\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou průměry těchto proměnných, s_x a s_y příslušné směrodatné odchylky a N počet osob.

Korelace mezi "Instrukcemi" a "Češtinou" je při použití Pearsonova korelačního koeficientu vyjádřena číslem 0,505.



Obr. 2. Korelační grafy znázorňující případ absolutní shody ($r=1$), nezávislosti ($r=0$) a absolutní protikladnosti ($r=-1$).

Podívejme se ještě na tři korelační grafy (obr. 2). Na prvním z nich je vyjádřen vztah absolutní korelační shody mezi proměnnými (body leží na přímce a čím vyšší je hodnota jedné proměnné, tím vyšší je i hodnota druhé proměnné a naopak), dále vztah nezávislosti (body jsou rozsety náhodně) a vztah absolutní protikladnosti (body leží opět na přímce, avšak čím vyšší je hodnota první proměnné, tím nižší je hodnota druhé proměnné a naopak). Pearsonův korelační koeficient vyjadřuje absolutní shodu číslem +1, absolutní protikladnost číslem -1 a vztah nezávislosti nulou. Pohybuje se tedy v mezích od -1 do +1.

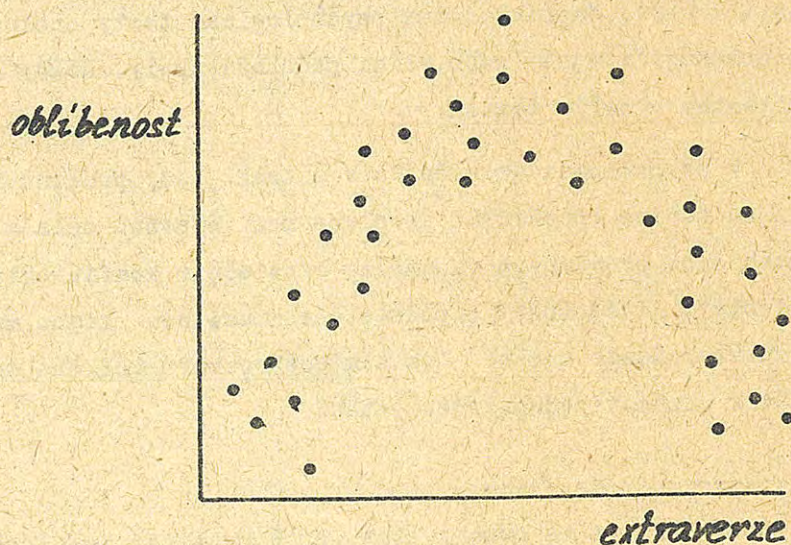
Vraťme se nyní ke vzorci (1). Je-li - podle předpokladu, který jsme učinili v předchozí kapitole - průměr obou proměnných roven nule a směrodatná odchylka je v obou případech rovna jedné, vzorec se podstatně zjednoduší:

$$r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2).$$

Vidíme teď, že Pearsonův korelační koeficient je průměr součinů vzniklých násobením v příslušných dvojicích. Proto mluvíme někdy o "součinové korelaci" (některé korelační koeficienty tuto vlastnost nemají).

Korelační vztahy, znázorněné na uvedených grafech, nazýváme lineární. Tento termín je možno vysvětlit tak, že body grafů jsou vždy seskupeny na přímce nebo tak, že je možno jejich seskupením přibližně proložit přímkou. Jsou-li tyto body seskupeny kolem křivky, jak je to výrazně znázorněno na obr. 3., jde o nelineární korelaci, kterou nelze adekvátně vyjádřit Pearsonovým korelačním koeficientem. Nelineární korelace nelze faktorovat. Jako příklad nelineární korelace jsme na obr. 3. zvolili vztah mezi extravertzí a oblíbeností v kolektivu. Introvertní lidé jsou obvykle málo oblíbeni, ale extrémní extraverti, kteří jsou silně impulzivní a přehnaně společenští, jsou také málo oblíbeni.

Zamysleme se nyní nad cestou abstrakce, kterou jsme postupovali a nad tím, jak daleko jsme na ní dospěli.



Obr. 3. Grafické znázornění křivkové korelace.

První abstrakcí byl výběr vlastností, o které se zajímáme a výběr testů k jejich měření. Zvolili jsme dva testy a o všechno ostatní jsme se přestali zajímat. Druhou abstrakcí byla kvantifikace výkonů, číselné vyjádření výsledků v obou testech. Třetí abstrakcí je, že se přestáváme starat o jednotlivce a zkoumáme pouze vzájemnou závislost proměnných, tak jak je zachycena v tabulce nebo v grafu. Čtvrtou abstrakcí je, že tento vztah vyjádříme jediným číslem, tj. Pearsonovým korelačním koeficientem. Ve faktorové analýze nás čekají další kroky na této cestě, kdy budeme muset abstrahovat i od jednotlivých korelačních koeficientů.

3. Interpretace korelací

Proč dvě proměnné mezi sebou korelují?¹⁾

Příčiny korelace mohou být v podstatě trojího druhu:

(a) Existuje kauzální faktor, který působí na obě proměnné a ovlivňuje je buďto ve stejném směru, nebo každou jiným směrem. Příkladem může být korelace mezi známkami ve dvou předmětech, kde společným kauzálním faktorem je píle (nebo inteligence, nebo sympatie učitele, který v obou předmětech učí). Čím větší píle, tím také - i když s četnými výjimkami - lepší známky.

(b) Jedna proměnná je příčinou druhé a její kolísání tedy vede (někdy se zpožděním) ke kolísání druhé proměnné. Například korelace mezi teplotou vzduchu a počtem návštěvníků plovárny je důsledkem zřejmého kauzálního vztahu. V některých případech je kauzální působení vzájemné (tempo zbrojení ve dvou znepřátelených státech).

(c) To, co dvě proměnné reprezentují, je částečně totožné (dochází ke vzájemnému "překrývání" či "průniku"; v krajním případě je jedna proměnná částí druhé). Například dva psychologické testy spolu mohou korelovat proto, že obsahují stejné (nebo velmi podobné) úkoly. Někdy se počítá korelace mezi subtestem a celým testem.

V psychologii jsme často v situaci, kdy příčinu korelace neznáme nebo ji jen tušíme (například korelace mezi stavbou těla a temperamentem). To, že vztah dvou proměnných vyjádříme korelačním koeficientem, je nezřídka vlastně přiznáním nevědomosti o podstatném kauzálním vztahu mezi nimi. Faktorová analýza však často umožní - na základě rozboru velkého množství korelací - dospět k poznání podstatných vztahů.

1) Přesně bychom se museli ptát, proč korelují nenulově, neboť nějak korelují vždycky. To bychom však byli považováni za přílišné pedanty.

Cvičení

1. Vypočítejte sami Pearsonův korelační koeficient z tab. 1.
2. Vyberte náátkou 20 knih ze své knihovny. Změřte jejich výšku, šířku a tloušťku, запиšte tyto údaje do tabulky. Načrtněte všechny tři korelační grafy. Najděte sami další proměnné ze své denní praxe, mezi kterými má smysl zjišťovat korelace.
3. Napište z paměti vzorec Pearsonova korelačního koeficientu pro případ proměnných s nulovými průměry a jednotkovými variancemi.
4. Jednu z vlastností, které chceme navzájem korelovat, mají všichni jedinci našeho souboru ve stejné míře. Jaká bude korelace? Načrtněte korelační graf.
5. Najděte další příklady na vzájemné ovlivňování proměnných, jež mezi sebou korelují!
6. Kdybychom korelovali výsledek testu schopností (součet bodů) s prospěchem vyjádřeným jako součet známek, jakou korelaci bychom patrně dostali?
7. Odhadněte velikost a znaménko Pearsonova korelačního koeficientu, který bychom dostali z dat v obr. 3.

C) Korelace a faktory (příklad)

Podáme nyní malý příklad výsledku faktorové analýzy schopností, který nám už bude po dosavadním výkladu přístupný. (Příklad je pro jednoduchost idealizován a odpovídá skutečnosti jen přibližně.)

Větší množství školních dětí bylo vyšetřeno sedmi testy:

1. Relace (ukázka úlohy: Doplňte slovo úměru "Krejčí" : šaty = obuvník : ?).
2. Třídění pojmů (ukázka: Podtrhněte slovo, které nepatří k ostatním: květák - zelí - kapusta - oves - kedlubna).
3. Přesmyčky (ukázka: Vytvořte slovo z písmen R, A, P, Í, P).
4. Zobecňování (ukázka: Co mají společného pampeliška a konvalinka?)
5. Fluentita (ukázka : Vytvořte co nejvíce slov začínajících písmenem "R" !).
6. Shody a protiklady (ukázka: Najděte dvojici slov, která buď znamenají totéž, nebo opak: zítra - dnes - letos - včera - večer).
7. Slovník (ukázka: Co znamená slovo "mikroskop" ?).

Tabulka 2. Korelační matice sedmi testů schopností

	1	2	3	4	5	6	7
1	1,00	0,42	0,21	0,56	0,28	0,35	0,42
2	0,42	1,00	0,18	0,48	0,24	0,30	0,36
3	0,21	0,18	1,00	0,24	0,12	0,15	0,18
4	0,56	0,48	0,24	1,00	0,32	0,40	0,48
5	0,28	0,24	0,12	0,32	1,00	0,20	0,24
6	0,35	0,30	0,15	0,40	0,20	1,00	0,30
7	0,42	0,36	0,18	0,48	0,24	0,30	1,00

Všechny testy byly navzájem korelovány. Výsledkem je korelační tabulka (korelační matice), ve které jsou uspořádány všechny možné korelační koeficienty (viz tab. 2.). V diagonále jsou jedničky, protože každý test sám se sebou koreluje absolutně. Korelační matice je symetrická, protože každý koeficient je v ní zapsán dvakrát (což je z formálních důvodů výhodné; někdy se však také píše jen poloviční, trojúhelníková matice).

Inspekcí této korelační matice zjistíme především, že všechny korelace jsou kladné, jak je ostatně u testů schopností pravidlem. Některé jsou dosti vysoké (0,56 mezi "Relacemi" a "Zobecňováním"), jiné jsou velmi nízké (0,12 mezi "Přesmyčkami" a "Fluenticitou"). Máme pocit, že všechny tyto korelace jsou nějak navzájem spjaté, ale stěží bychom pouhým uvažováním zjistili, jakým způsobem. Tato úloha přesahuje operační rozsah našeho intelektu a paměti.

A přece je celá korelační matice matematicky v podstatě velmi jednoduchá. Jejím faktorováním bychom získali pouze jediný faktor, který je obsažen v tabulce 3.

Tabulka 3. Faktor odvozený z korelační matice sedmi testů schopností

Relace	0,7
Třídění pojmů	0,6
Přesmyčky	0,3
Zobecňování	0,8
Fluenticita	0,4
Shody a protiklady	0,5
Slovník	0,6

Použitím termínu "faktor" jsme trochu předběhli. Co vlastně je faktor? Je to právě onen sloupec (vektor) čísel, ve kterém je zachycena ("zakódována") informace obsažená v korelační matici. Můžeme se o tom přesvědčit. Korelace mezi kterýmikoli dvěma testy v korelační matici je rovna násobku příslušných čísel (tzv. faktorových zátěží, "loadings", jednotlivých testů) v tab. 3. Informace obsažená v tab. 2. je tedy v tab. 3 obsažena v daleko jednodušší podobě.

Toto matematické zjednodušení, redukce velkého množství korelačních koeficientů na poměrně malé množství faktorových zátěží bez jakékoli ztráty informace (nebo - jak tomu bývá v praxi - s malou ztrátou informace) představuje zřejmě slibnou možnost pojmového zjednodušení, případně vysvětlení psychologických vztahů mezi našimi testy.

Ptáme se tedy dále: co je faktor v tab. 4. kromě "sloupce čísel", kromě vektoru, ve kterém je zhuštěna informace obsažená v korelační matici?

Za určitých okolností lze faktory interpretovat, tj. chápat je jako odraz reálně existujících činitelů, sil nebo vlastností, které se projevují ve zjištěných korelacích.

V našem případě se zdá nejvhodnější interpretace "verbální inteligence". Všechny použité testy jsou verbální a nejvyšší zátěže¹⁾ zde mají právě ty testy, které vyžadují abstraktní operace se slovy a s jejich významy.

Můžeme říci, že faktor je ideální proměnná a faktorové zátěže mají podobný (někdy totožný) význam jako korelace mezi příslušným testem a příslušným faktorem.

Máme tedy ve faktorové analýze dvojí druh proměnných. Na jedné straně jsou to empirické, měřené proměnné. Z korelací mezi nimi konstruujeme faktory, ideální (vysouzené, v jistém smyslu "intervenující") proměnné. Empirické proměnné budeme nadále nazývat "testy", ať už jsou to proměnné založené na testovém měření nebo jakékoli jiné kvantitě.

Cesta od korelační matice k faktorům je matematicky i výpočetně podstatně složitější než cesta zpět, tj. od faktorů ke korelacím, kterou jsme naznačili. Některé dílčí problémy na této cestě nejsou dořešeny nebo jsou dokonce neřešitelné a musíme je obcházet dosti nejistým odhadem (tzv. problém komunalit a počtu faktorů). Počet faktorů je obvykle vyšší než jedna a řešení není tak "čisté" jako v námi konstruovaném případě: reprodukce ko-

1) Zátěž je vztah mezi testem a faktorem. Je terminologicky výhodné říkat, že test má zátěž ve faktoru, jindy že faktor má zátěž v testu. Význam je týž. Ekvivalentní vyjádření je, že faktor "sytí" test.

relačních koeficientů není ve skutečnosti zcela přesná. Pro první představu však uvedený příklad snad postačí.

Elegance řešení, které jsme právě předvedli, fascinuje některé psychology natolik, že vidí ve faktorové analýze svou hlavní metodu. Nabízí se zde možnost podstatného zjednodušení pozorovaných vztahů, jejich redukce na menší počet. Kromě toho se zdá, že na základě faktorové analýzy jednotlivým korelacím lépe rozumíme, blížíme se jejich kauzálnímu výkladu. Pronikáme od povrchu jevů k podstatě, například od jednotlivých testů k základním rozumovým schopnostem.

Cvičení

1. Přesvědčte se narýsováním grafu (viz obr. 2), že každý test sám se sebou koreluje jedničkově!
2. Faktor dominance má v testu ráznosti zátěž 0,4, v testu ukázněnosti - 0,3, v testu odvahy 0,2 a v testu něžnosti - 0,2. Vypočítejte odpovídající korelace.
3. Víme, že korelace v miniaturní korelační matici testů t_1 , t_2 , t_3

	t_1	t_2	t_3
t_1	1,0	0,6	0,3
t_2	0,6	1,0	0,2
t_3	0,3	0,2	1,0

jsou způsobeny jediným faktorem. Určete faktorové zátěže všech tří testů.

D) Smysl faktorové analýzy

Základním problémem řady vědních oborů je nesmírná rozmanitost jevů, které zkoumají. Tyto jevy se všelijak kombinují, proplétají a kříží. Pro toho, kdo nezná jejich podstatu, vytvářejí chaotickou směsici.

Vezměme jako příklad středověkého chemika - alchymistu. Nebyl bez vědomostí. Věděl, co se stane, jestliže se určité látky v určitých poměrech mísí, zahřívají, žíhají apod., podobně jako kuchařka zná své recepty a kořenářka účinek různých bylin, ale jeho vědomostem chyběl přiměřený teoretický základ.

Základním a nezbytným krokem kupředu bylo v chemii nalezení elementů, z nichž je vše složeno, tedy prvků, jejichž slučováním vznikají všechny ostatní látky. Tyto prvky, tak jak je známe z Mendělejevovy tabulky, představují

nesmírně účinnou redukcí zdánlivého chaosu, před kterým stál středověký alchymista. Jeho znalosti umožňovaly pouze popis látek vyskytujících se v přírodě nebo vznikajících v laboratoři, a to ještě málo účelný popis, ulpívající spíše na méně důležitých, povrchnímu pozorování přístupných vlastnostech látek. V podobné situaci byla ve svých počátcích mineralogie, zoologie, botanika, ekonomie, sociologie - a pochopitelně i psychologie. Bez účelného třídění, bez vhodných klasifikačních kategorií, bez stanovení základních druhů pozorovaných jevů je postup vědy takřka nemožný.

Situace psychologa osobnosti nápadně připomíná situaci alchymisty, který by se rád stal skutečným chemikem a tuší, čeho je k tomu třeba. Rozmanitost lidských povah si v ničem nezadá s rozmanitostí chemických sloučenin. Charakteristické znaky jednotlivců jsou tak početné a objevují se v tolika kombinacích, že k jejich zvládnutí nestačí operační rozsah lidského intelektu. Potřeba metody, která by usnadnila klasifikaci, je zřejmá.

Klasická vědní metodologie, která je v podstatě metodologií přírodních věd, našla hlavní řešení v experimentu. Experiment, ve kterém se manipuluje zpravidla jednou nezávisle proměnnou, umožnil zde izolovat hlavní činitele a vztahy.

Právě srovnání faktorové analýzy s klasickým laboratorním experimentem je v této souvislosti užitečné. Některé jevy se mu totiž vymykají. Kdybychom mohli s laboratorní čistotou vytvářet radikálně různé podmínky pro vývoj osobnosti a dlouhodobě sledovat výsledky, vyvolali bychom jevy, které by umožnily proniknout poměrně rychle k některým podstatným zákonům psychologie osobnosti. Jak z etických, tak z praktických důvodů to není možné. Cattell uvádí v této souvislosti absurdní myšlenku: vytvořit dvě vyvážené skupiny matek a jedné z nich usmrtit děti... Avšak i v jiných vědních oblastech se dostáváme do situací, kdy je kontrolovaný experiment nemožný a kdy musíme zkoumat objekty (například národohospodářské soustavy), na něž naprosto nemůžeme působit a které se utvářejí pod vlivem mnoha nekontrolovatelných (avšak pozorovatelných a měřitelných!) činitelů.

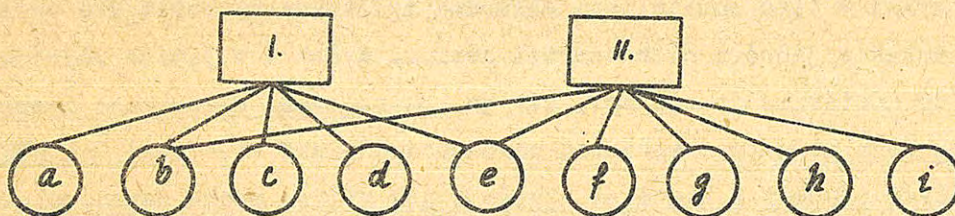
Netvrdíme samozřejmě, že by nebylo možno zkoumat osobnost v laboratoři. Testy, kterých užíváme ve faktorové analýze a ve výzkumu osobnosti vůbec, mají často laboratorní charakter. Ty však pouze osobnost měří, nemodifikují ji. Nejsou to experimenty v pravém slova smyslu. V jejich výsledcích se projevuje ona nekonečná rozmanitost vlivů, která charakterizuje normální lidskou hereditu a ekologii. Experimenty, které osobnost skutečně - byť často jen dočasně - modifikují, jsou cenné, ale vzácné (například dlouhodobé hladovění, kterému se za války k vědeckým účelům dobrovolně podrobili američtí pacifisté, odmítající zabíjet).

Naším úkolem tedy typicky je zkoumat množství jevů, jež nemůžeme podstatně ovlivňovat. Tyto jevy jsou natolik složitě propojeny, že jednotlivé souvislosti, jež se pokoušíme zkoumat samostatně, se ukazují jako nezřetelné, mnohoznačné nebo samy o sobě bezvýznamné.

Multivariační metodologie je odvážným pokusem obrátit v sílu to, co se za daných okolností jeví jako naše největší slabost. Jsou-li naše pokusy o proniknutí k podstatným faktorům a jejich izolaci rušeny mnohonásobnou závislostí a "propleteností" jevů - učinme předmětem svého výzkumu právě ony mnohonásobné závislosti!

V experimentálním nebo jiném výzkumu se často zkoumá vztah mezi dvěma jevy (veličinami, testy atd.). Zkoumáme-li současně ještě třetí jev a zjistíme-li všechny tři možné vztahy (a-b, a-c, b-c), pak množství informací, které jsme získali, je již podstatně větší. Při současném zkoumání 10 jevů je to již 45 vztahů a při 80 jevech přes tři tisíce. Je jistě lákavé pokusit se o využití tohoto informačního bohatství. Nemůžeme-li konat sami dostatečně radikální experimenty, sledujme výsledky mnoha současně probíhajících grandiózních "experimentů", jimž jsou lidská individua v přírodě a ve společnosti vystavena!

Faktorová analýza nepřináší zcela nový způsob uvažování, nýbrž pouze upřesňuje, usnadňuje a poněkud obměňuje abstrakci, která je ve vědě běžná. Jejím cílem je objevovat pod symptomy, jež jsou jen nepevně (silně pravděpodobnostně) organizovány v syndromy, hlubší a základnější činitele, to, co působí zjištěné korelace. Jde buď o intervenující proměnné nebo o hypotetické konstrukty, které z korelací vysuzujeme.



Obr. 4. Schématické znázornění vztahů mezi testy (empirickými proměnnými) a faktory (ideálními, intervenujícími proměnnými).

Vztah mezi tím, co pozorujeme, resp. měříme a tím, co za pomoci faktorové analýzy z měřeného vyvozujeme, lze naznačit graficky (viz obr. 4). Písmena a - i označují testy (jakékoli empirické proměnné), číslce I a II faktory. Korelace mezi testy jsou určeny jejich vztahem k faktorům a na druhé straně je možno faktory z těchto korelací vyvodit. Každému z faktorů odpoví-

dá syndrom, v prvním případě a,b,c,d,e, v druhém případě b,e,f,g,h,i. Tyto syndromy se různě překrývají (kdyby toho nebylo, stačilo by vlastně vyhledat inspekci v korelační matici skupiny navzájem korelujících testů). Faktory jsou odvozené, ideální veličiny. Nelze je přímo měřit, i když nejsou proto méně skutečné.

Faktorová analýza sloužila doposud ponejvíce ke studiu individuálních rozdílů mezi lidmi. Individuální rozdíly se někdy považují za sekundární předmět vědecké pozornosti. Podstatné jsou přece zákony, které platí pro všechny, tedy to, co je lidem společné, nikoli to, co je individuální. Avšak právě v psychologii osobnosti, kde jsou možnosti experimentu omezeny, se individuální rozdíly ukazují jako cesta k objevení oněch obecných, lidem společných zákonitostí. Správně stanovené faktory individuálních rozdílů totiž často odpovídají relativně samostatným funkčním systémům, v jejichž rozvinutosti nebo výkonnosti se lidé liší, generalizovaným tendencím chování, potřebám, zájmům, podstatným výchovným vlivům a podobně.

Faktorová analýza je účinným nástrojem pro orientaci v neprobádané oblasti vědy, kde už sice máme přibližnou představu o tom, co a jak pozorovat a měřit, ale chybí základní klasifikační kategorie, které by nám pomohly zvládnout kaleidoskopickou rozmanitost jevů. Thurstone o tom říká: "Faktorová analýza je užitečná hlavně na pomezí vědy..., zvláště v oblastech, kde v podstatě chybí základní a plodné pojmy... Nové metody mají skromnou úlohu. Umožňují nám vytvořit jen nejhrubší mapu nové oblasti." (Thurstone, 1947, str. 56.)

Je ovšem možné, že se Thurstone mýlil, pokud jde o psychologii. Psychologie nedospěje nikdy k tak přesnému, "tvrdému" měření jako fyzika nebo chemie a nevyrovná se po této stránce ani biologii. Snad si historická proměnlivost lidské psychiky ve spojení s extrémně probabilistickým charakterem psychologických jevů bude vždy znovu a znovu vyžadovat to, co Thurstone nazývá "nejhrubším mapováním"... Ostatně uvnitř psychologie se stále otvírají nové oblasti, jež by mohly být - kdyby existovala příslušná mapa - označeny okřídlenými slovy "hic sunt leones". K průzkumu těchto oblastí je faktorová analýza určena především.

Kapitola II. FAKTOROVÝ MODEL

První kapitola měla poskytnout předběžnou orientaci v pojmech faktorové analýzy a ve způsobu myšlení, který je s touto metodou spojen. Nyní přistupujeme k soustavnějšímu podání jejích matematických základů. Snažíme se přitom vystačit s minimem matematických pojmů. Nejnutnější maticové operace uvádíme v Dodatku.

A) Testy jako lineární kombinace faktorů

Začneme příkladem. Řekněme, že zdvořilé chování (zdvořilost) je výsledkem následujících faktorů: (1) sociální inteligence, (2) družnosti a (3) inhibovanosti. Jak to vyjádřit matematicky? Nejjednodušší model je:

$$Z = S + D + I, \quad (3)$$

tj. "Zdvořilost je součtem sociální inteligence, družnosti a inhibovanosti".

Tak jednoduché to bohužel nemůže zůstat. Není totiž a priori žádný důvod k tomu, aby všechny tři uvedené faktory hrály ve zdvořilosti stejnou úlohu. Řekněme, že největší roli hraje inhibovanost, menší roli družnost a nejméně záleží na sociální inteligenci. Pak nebude zdvořilost prostým, nýbrž váženým součtem (lineární kombinací) našich tří faktorů:

$$Z = 0,4 S + 0,6 D + 0,7 I \quad (4)$$

Váhy, které jsme právě zavedli¹⁾, odpovídají poměrům důležitosti 0,16 : 0,36 : 0,49 (druhé mocniny vah). Příklad je ovšem fiktivní a váhy zvoleny libovolně. Abychom po výpočtu podle rovnice (4) dostali zdvořilost opět ve standardním skóre ($M=0$, $s=1$), volili jsme váhy tak, aby součet jejich čtverců byl roven jedné. V dalším výkladu se tyto vztahy ozřejmí a ukáže se také, že standardní skóre zdvořilosti dostaneme při uvedených vahách pouze za předpokladu nezávislých, ortogonálních faktorů.

Teď už přejdeme k obecnému případu a použijeme zápisu obvyklého v matematické statistice:

$$z_j = a_{j1}F_1 + a_{j2}F_2 + \dots + a_{jm}F_m \quad (5).$$

1) O několik stránek dále se ukáže, že tyto faktorové váhy jsou totožné s faktorovými zátěžemi, jak jsme se s nimi seznámili v kapitole I.

Tuto takzvanou specifikační rovnici čteme: "Skóre v testu z_j se rovná součtu skóre ve faktoru F_1 násobenému vahou a_{j1} plus skóre ve faktoru F_2 násobenému..." atd.

Specifikační rovnici můžeme "individualizovat", tj. napsat ji pro jednotlivý případ, pro jedince i :

$$z_{ji} = a_{j1}F_{1i} + a_{j2}F_{2i} + \dots + a_{jm}F_{mi}, \quad (6)$$

což čteme: "Skóre jedince i v testu z_j se rovná součtu jeho skóre ve faktoru F_1 násobenému vahou..." atd.

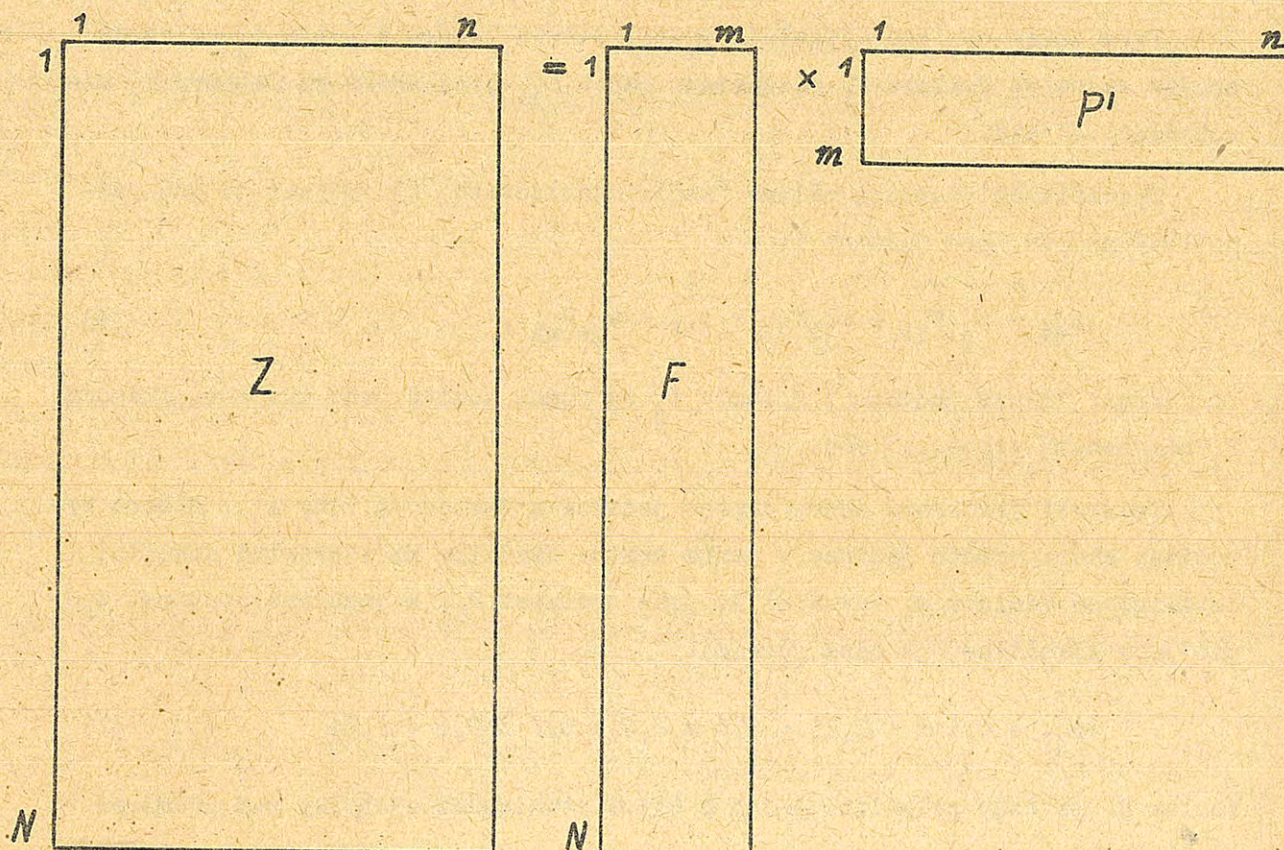
Známe-li faktorová skóre daného jedince a faktorové váhy a_j , můžeme vypočítat skóre tohoto jedince v daném testu. Jestliže se například sociální inteligence Václava B. rovná -1,3, jeho družnost 2,4 a jeho inhibovanost 0,6, pak jeho zdvořilost je dána rovnicí:

$$z_{ji} = 0,4 \times (-1,3) + 0,6 \times 2,4 + 0,7 \times 0,6 = 1,24 \quad (7)$$

Václav B. je tedy přibližně jeden a čtvrt standardní odchylky nad průměrem ve zdvořilosti.

Je nutno mít na paměti, že naše rovnice počítají s velikým "kdyby": mohli bychom podle nich konat přesné výpočty, kdybychom znali faktorová skóre. Ve skutečnosti faktorová skóre pouze odhadujeme, jak o tom pojednáme v kapitole V. S touto výhradou je třeba sledovat celý další výklad faktorového modelu.

Předpokládejme, že známe faktorová skóre většího množství osob v m faktorech a příslušné faktorové váhy. Pak můžeme podle rovnice (6) vypočítat skóre kteréhokoli jedince ve kterémkoli z n testů, jejichž faktorové váhy známe. Počítáme-li s N jedinci, znamená to $N \times n$ rovnic typu rovnice (6). Při 300 lidech a 20 testech by to bylo 6.000 rovnic. Ke kompaktnějšímu vyjádření použijeme maticové algebry. Sestavíme matici F , tabulku, kde bude tolik sloupců, kolik je faktorů (tj. m sloupců) a v každém řádku budou faktorová skóre jednoho jedince (bude tedy N řádků) viz obr. 5. Tuto matici F budeme násobit maticí P' . V každém jejím sloupci jsou faktorové váhy jednoho testu. Matice P' má tedy n sloupců a m řádků. Matice Z má N řádků a n sloupců, obsahuje skóre všech jedinců ve všech testech.



Obr. 5. Výpočet testových skóre z faktorových skóre a faktorových vah: schématické znázornění příslušného násobení matic.

Tři námitky proti lineárnímu modelu

Proti lineárnímu modelu, tak jak je vyjádřen specifikační rovnicí, je možno namítnout, že je to model příliš jednoduchý. Sčítání je vskutku nejelementárnější početní úkon. Hypoteticky by bylo možno faktorová skóre mezi sebou násobit, zavést do specifikační rovnice exponent, na který by se určité faktorové skóre umocňovalo apod. Mohli bychom například vyjít z předpokladu, že pracovní výkon V odpovídá násobku schopností S a pílě P , tedy $V = S \times P$. Domníváme se však, že dosud nebylo dostatečně využito možností lineárního modelu. Kromě toho - jak již víme - faktorová analýza začíná Pearsonovými korelačními koeficienty, jejichž použitelnost předpokládá lineární vztahy mezi testy; odchylky od linearit se zanedbávají. A konečně, jak jsme uvedli v první kapitole (viz str. 10), v psychologii máme zřídka zaručeno, že pracujeme s intervalovými škálami - a násobení, dělení atd. vyžadují dokonce poměrové škály!

Druhá námitka proti faktorovému modelu je v tom, že použití stejných vah pro všechny jedince může vést ke zkreslení. Například můžeme říci: Ve zdvořilosti Jaroslava M. se výrazně uplatňuje sociální inteligence, která

v jeho individuální struktuře zdvořilosti hraje větší roli než družnost a inhibovanost; tyto dvě vlastnosti u něj ke zdvořilosti nevedou. Jiný příklad: Úkoly určitého testu je možno řešit buď logickým úsudkem nebo prostorovou představivostí. U toho, kdo je řeší logickým úsudkem, na prostorové představivosti vůbec nezáleží, logicky by tedy faktor prostorové představivosti měl mít u něj nulovou váhu. To je extrém. Avšak i tehdy, řeší-li někteří onen test spíše logickým úsudkem a jiní spíše prostorovou představivostí (a je-li tato volba nezávislá na jejich úrovni v těchto schopnostech!), je váha odvozená ze vzorku, v němž byly zastoupeny obě skupiny osob, zřejmě neadekvátní. - Pokud je nám známo, nebyla oprávněnost uvedené námitky nikdy prokázána, při nejmenším nám však její uvážení pomůže k hlubšímu pochopení faktorového modelu.

Uvedené dvě námitky proti faktorovému modelu zůstávají "v rodině", tj. na bázi kvantitativního analytického přístupu k psychologii, zejména k psychologii osobnosti. Třetí námitka je zásadnější. Vyslovují ji ti, kdo pracují (nebo koketují) s pojmem geštaltu nebo "komplexnosti", "organičnosti", "jednoty atd. Tito autoři vytýkají faktorové analýze krajní atomismus. Osobnost, říkají často, je víc než "součet" nějakých částí, je to jedinečná, živá, organická jednota... Odmítnutí faktorové analýzy je pak vlastně odmítnutím měření, kvantifikace v psychologii vůbec. - Zásadní polemika s těmito názory by přesáhla poslání tohoto textu. Jsou svým způsobem oprávněné a brání nám propadnout fetišismu čísel. Avšak i jejich zastánci, rozhodnou-li se k empirickému výzkumu, zpravidla dospějí ke kvantifikaci a nejednou přikročí i k faktorové analýze. Interpretují pak faktory například jako "aspekty" (to je řešení Meiliho, který se pokusil stanovit geštaltistické faktory inteligence).

Cvičení

1. Dokončete slovní vyjádření rovnice (5).
2. Dokončete slovní vyjádření rovnice (6).
3. Napište několik hypotetických specifikačních rovnic (které si sami vymyslete) a do každé dosaďte konkrétní hodnoty, které odhadnete pro kteroukoli osobu. Kombinujte přitom záporné váhy a záporná skóre. Jaký je význam záporných skóre?
4. Faktorové váhy neodpovídají jednotlivcům. Jsou to konstanty odvozené z hromadných dat. U kterých jedinců se při jejich použití nejvíce zmýlíme?

B) Specifikační rovnice a korelace mezi testy

Prozatím jsme ponechali stranou základní rys faktorové analýzy - totiž to, že se analyzují korelační matice. Faktorový model je totiž nevyžaduje. Nyní však odvodíme z modelu, na který jsme přistoupili¹⁾, korelace mezi testy. Budeme mít ovšem na paměti, že naším cílem je nalezení zpětné cesty, tj. od korelací k faktorům (k faktorovým vahám čili k faktorovým zátěžím).

Vyjdeme z dvojice specifikačních rovnic, ve kterých se vyskytují tytéž faktory (které patří do téže faktorové matice). Jsou to specifikační rovnice testů z_j a z_k :

$$\begin{aligned} z_{ji} &= a_{j1}^F l_{1i} + a_{j2}^F l_{2i} + \dots + a_{jm}^F l_{mi} \\ z_{ki} &= a_{k1}^F l_{1i} + a_{k2}^F l_{2i} + \dots + a_{km}^F l_{mi} \end{aligned} \quad (8).$$

Víme, že oba testy jsou ve standardním tvaru, což znamená, že korelace mezi nimi je dána jednoduchým vzorcem:

$$r_{jk} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{ji} z_{ki} \quad (9).$$

Dosažením pravých stran rovnic (8) do vzorce (9) dostaneme:

$$r_{jk} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_{j1}^F a_{k1}^F + \dots + a_{j1}^F a_{km}^F +$$

$$+ a_{j2}^F a_{k1}^F + \dots + a_{j2}^F a_{km}^F +$$

$$\dots$$

$$+ a_{jm}^F a_{k1}^F + \dots + a_{jm}^F a_{km}^F)$$

$$(10).$$

Nyní vytkneme v každém z výrazů napravo konstanty a zrušíme závorku. Výraz $1/N$ přitom zařadíme vždy za dvojici vah (zátěží). První dva výrazy pak budou vypadat takto:

$$a_{j1} a_{k1} \frac{1}{N} \sum_i F_{1i}^2 \quad a_{j1} a_{k2} \frac{1}{N} \sum_i F_{1i} F_{2i} \quad , \quad (11)$$

čož je ovšem podle vzorce (2), resp. (9) rovno

$$a_{j1} a_{k1} \quad a_{j1} a_{k2} r_{F_1 F_2} \quad (12)$$

Z rovnice (10) vidíme, že korelace mezi kterýmikoli dvěma testy závisí

1) Touto formulací zdůrazňujeme, že jde konec konců o libovolný matematicko-statistický model, který nemá o nic větší právo na existenci, než jaké si vydobude vědeckou hodnotou výsledků dosažených s jeho použitím.

- v obecném případě - na všech zátěžích obou testů a na korelacích mezi všemi faktory. Vidíme také, že každý výraz na pravé straně rovnice (10), který obsahuje nulovou korelaci mezi faktory, se rovná nule a odpadá. Jsou-li všechny korelace mezi faktory nulové (samozřejmě až na korelaci každého faktoru se sebou samým, která je rovna jedné), dostaneme pro korelaci mezi dvěma testy výraz:

$$r_{jk} = a_{j1}a_{k1} + a_{j2}a_{k2} + \dots + a_{jm}a_{km},$$

neboli slovy: "Korelace mezi dvěma testy je rovna součtu součinů jejich zátěží vždy v příslušném faktoru."

Pokusme se nyní totéž vyjádřit maticově - uvidíme, že se zápis i odvození podstatně zjednoduší.

Rovnice (6) specifikuje obecný prvek z_{ji} ($j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N$) matice testových skóre. Tyto prvky sestavíme do matice Z typu $(n \times N)$. Dále ve specifikační rovnici vystupují faktorové zátěže a_{jp} ($j = 1, \dots, n; p = 1, \dots, m$). Označme matici z nich sestavenou symbolem P ; je to tzv. faktorová matice, typu $(n \times m)$. Poslední matice, kterou potřebujeme, je sestavena z prvků F_{pi} ($p = 1, \dots, m; i = 1, \dots, N$). Je to matice typu $(m \times N)$, jejímiž prvky jsou faktorové skóre. Označíme ji F .

Přesvědčte se sami, že specifikační rovnici (6) můžeme maticově zapsat jako jednoduchý součin:

$$Z = P F \quad (14)$$

Obecný prvek korelační matice R je vyjádřen vztahem (9). Všimněme si, že jde o skalární součiny řádkových vektorů matice Z , dělené N . Můžeme tedy napsat, že

$$R = \frac{1}{N} Z Z' \quad (15)$$

Stejně můžeme maticově zapsat korelace mezi faktory - označme matici interkorelací faktorů ϕ :

$$\phi = \frac{1}{N} F F'$$

A teď už vše, co jsme při reprodukování korelací mezi testy pracně odvozovali algebraicky, dostaneme prostě dosazením specifikační rovnice (14) do vztahu (15):

$$R = \frac{1}{N} Z Z' = \frac{1}{N} P F (P F)' = \frac{1}{N} P F F' P' = P \frac{F F'}{N} P',$$

tj.

$$R = P \Phi P'$$

kde R je korelační matice, P faktorová matice (matice faktorových zátěží) a Φ matice korelací mezi faktory.

V případě nekorelovaných (ortogonálních) faktorů se tato rovnice zjednoduší: Matice korelací mezi faktory je pak matice jednotková ($\Phi = I$) a

$$R = P P'$$

Vyjmeme-li z matice P jen dva řádky (j a k) pro výpočet korelace r_{jk} , musíme nicméně zachovat - v obecném, nikoli v ortogonálním případě - celou matici Φ , tj. "zakalkulovat", pojmout do výpočtu všechny korelace mezi faktory.

Cvičení

1. Přepište rovnice (10) tak, aby její pravá strana obsahovala sčítance ve formě (12).
2. Přesvědčte se, že rovnice (10) lze použít pro výpočet korelační matice uvedené v tab. 2 na str. 18 z faktoru uvedeného na str. 18 v tab. 3.
3. Na čem záleží v obecném případě korelace mezi kterýmikoli dvěma testy?

C) Rozklad variance a typy faktorů

Klademe otázku, jaká část variance určitého testu připadá na který faktor. Známe-li faktorové složení testu, vyjdeme opět ze specifikační rovnice (6) a ze všeobecně známého vzorce pro výpočet rozptylu. Víme ovšem, že celková variance kteréhokoli testu je rovna jedné (a průměr nule). Vzorec pro výpočet variance má pak tento tvar:

$$s_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{ji}^2 \quad (16)$$

Dosadíme do rovnice (16) pravou stranu rovnice (6):

$$s_j^2 = \frac{1}{N} \sum_i (a_{j1}^F z_{1i} + a_{j2}^F z_{2i} + \dots + a_{jm}^F z_{mi})^2 \quad (17)$$

Rovnicí (17) nyní rozepíšeme:

$$s_j^2 = \frac{1}{N} \sum_i (a_{j1}^{F1i} \cdot a_{j1}^{F1i} + a_{j1}^{F1i} \cdot a_{j2}^{F2i} + \dots + a_{j1}^{F1i} \cdot a_{jm}^{Fmi} + a_{j2}^{F2i} \cdot a_{j1}^{F1i} + a_{j2}^{F2i} \cdot a_{j2}^{F2i} + \dots + a_{j2}^{F2i} \cdot a_{jm}^{Fmi} + \dots + a_{jm}^{Fmi} \cdot a_{j1}^{F1i} + a_{jm}^{Fmi} \cdot a_{j2}^{F2i} + \dots + a_{jm}^{Fmi} \cdot a_{jm}^{Fmi}) \quad (18)$$

Zrušíme závorku, vytkneme konstanty, zařadíme vždy $\frac{1}{N}$ za ně a dojdeme ke korelacím - stejně jako při postupu od rovnice (10) k rovnici (12). Výsledek je jednoduchý v ortogonálním případě (kdy všechny faktory navzájem korelují nulově):

$$s_j^2 = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \dots + a_{jm}^2 \quad (19)$$

nebo součtovou zkratkou:

$$s_j^2 = \sum_{p=1}^m a_{jp}^2$$

Zároveň je z rovnice (19) zřejmo, že varianci testu je možno rozložit na části (podíly či "komponenty") a že tyto komponenty odpovídají čtvercům příslušných zátěží.

V případě kosých (korelovaných) faktorů je situace opět nepříjemně složitá. Nemůžeme totiž přesně říci, jaká část variance testu připadá na který faktor.

Nyní začneme rozlišovat faktory různého typu:

1. Společné faktory (common factors): to jsou faktory, které "vstupují" ("sytí", mají nenulové zátěže) do dvou nebo více faktorů. Jejich zátěže budeme označovat písmenem "a" jako dosud.

2. Specifické faktory, které sytí vždy jen jeden test. Jejich zátěže budeme označovat písmenem "d" s indexem toho testu, který sytí (d_j).

3. Chybové faktory (error factors). Jde o náhodnou, nikoli systematickou chybu, a tedy chybový faktor sytí jen jeden test. Váhy chybových faktorů budeme označovat písmenem "e" s indexem toho testu, který sytí (e_j).

Uvedené definice nyní poněkud objasníme. Specifické faktory se odlišují od společných, jak bylo řečeno, pouze tím, že sytí jen jeden test. Vezmeme-li test "přesmyčky" z našeho úvodního příkladu (viz str. 17), vidíme, že v něm má zátěž 0,3 faktor "g", jediný společný faktor daného testového souboru.

Tento test však kromě faktoru "g" měří ještě další, jen sobě vlastní kvalitu, schopnost řešit úkoly tohoto druhu. Tato schopnost působí společně s inteligencí, ale statisticky (v jistém smyslu i funkčně) je na ní nezávislá.

Z definice společných faktorů vyplývá důsledek, že jsou to právě ty faktory, jež působí korelace mezi testy.

Chybové faktory jsou nevitáným, ale - jak víme z teorie měření vůbec a z teorie psychologického měření zvláště - naším stálým hostem. Provázejí nás i faktorovou analýzou a musíme jim zde věnovat právě tak velkou pozornost jako v teorii testů.

Co jsme dosud řekli o typech faktorů, podává přehledně obr. 6.

	společné faktory			specifické faktory						chybové faktory					
	F_1	F_2	F_3	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
t_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	d_1						e_1					
t_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		d_2						e_2				
t_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}			d_3						e_3			
t_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}				d_4						e_4		
t_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}					d_5						e_5	
t_6	a_{61}	a_{62}	a_{63}						d_6						e_6

Obr. 6. Kompletní faktorová matice s třemi typy faktorů.

Faktory F_1 až F_3 jsou společné, jinak řečeno v každém sloupci jsou zde aspoň dva elementy (zátěže) odlišné od nuly. Specifické a chybové faktory jsme označili písmeny D a E s příslušnými indexy. Prázdná políčka v části specifických faktorů, stejně jako v části chybových faktorů, znamenají podle definice těchto faktorů - nuly.

Specifický faktor od příslušného chybového faktoru nelze oddělit na základě faktorové analýzy. Musíme k tomu znát reliabilitu¹⁾ příslušného testu. Jsou časté případy, kdy reliabilitu nemůžeme zjistit a specifický faktor pak nelze oddělit od chybového. Mnozí autoři se o to - jak uvidíme později (str. 86), ke škodě věci - ani nezajímají.

1) Reliabilita testu je rovna nechybové části variance. Odhadujeme ji různými metodami, jež jsou popsány v každé učebnici psychometrické teorie testů.

Jestliže nemůžeme nebo nepovažujeme za nutné oddělit chybové a specifické faktory, můžeme pracovat s pojmem "jedinečných faktorů" (unique factors). Každému testu pak přísluší jedinečný faktor, jak je znázorněno na obr. 7.

	společné faktory			jedinečné faktory					
	F_1	F_2	F_3	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	u_1					
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		u_2				
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}			u_3			
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}				u_4		
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}					u_5	
6	a_{61}	a_{62}	a_{63}						u_6

Obr. 7. Kompletní faktorová matice s dvěma typy faktorů.

Jak už bylo řečeno, do korelací mezi testy vstupují pouze společné faktory, proto pracujeme většinou jen s první částí kompletní faktorové matice, s tzv. redukovanou faktorovou maticí, kterou označujeme písmenem P. (Dosud jsme písmene P používali pro faktorovou matici bez bližšího určení. Protože však s kompletní faktorovou maticí nepracujeme, nedojde k záměně.)

Z hlediska typů faktorů napíšeme nyní znovu specifikaci rovnici:

$$z_j = a_{j1}F_1 + a_{j2}F_2 + \dots + a_{jm}F_m + d_jD_j + e_jE_j \quad (21)$$

variance testu z_j má pak tyto komponenty (v případě orthogonálních faktorů):

$$s_j^2 = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \dots + a_{jm}^2 + d_j^2 + e_j^2 \quad (22)$$

V předchozích kapitolách znamenalo písmeno "m" počet všech faktorů, nyní jsme ho použili pouze k označení počtu společných faktorů. K záměně opět prakticky nemůže dojít, protože se běžně pracuje pouze se společnými faktory.

Ta část variance, která je dána součtem čtverců zátěží společných faktorů, se nazývá komunalita testu. Tento pojem má ve faktorové analýze velký význam, jak uvidíme později.

To, co již víme o varianci testu a jejím rozkladu ve faktorové analýze, můžeme nyní shrnout v tabulce 4.

Tabulka 4. Komponenty variance testu a jejich vzájemné vztahy

Celková variance	= 1	= $h_j^2 + d_j^2 + e_j^2$	= $h_j^2 + u_j^2$
Reliabilita	= r_{jj}	= $h_j^2 + d_j^2$	= 1 - e_j^2
Komunalita		= h_j^2	= 1 - u_j^2
Specifická		= d_j^2	
Jedinečnost	= u_j^2	= $d_j^2 + e_j^2$	
Chybová variance		= e_j^2	= 1 - r_{jj}

Cvičení

1. Proveďte pro případ kosých faktorů postup naznačený za rovnicí (18).
2. Naučte se z paměti tabulce 4.
3. Je dána redukovaná faktorová matice:

P:	F_1	F_2
1	0,3	0,7
2	0,6	0,4
3	0,8	0,3
4	0,6	0,0
5	0,0	0,9
6	0,3	0,6
7	0,0	0,5
8	0,8	0,0

Vypočítejte z ní korelace mezi všemi testy a "korelaci každého testu se sebou samým" (diagonální hodnoty korelační matice). Uvažte, co tyto diagonální hodnoty představují.

4. Proveďte náznakově násobení PP' pro kompletní faktorovou matici s třemi typy faktorů (obr. 6). Jak ovlivňují specifické a chybové faktory korelace mezi testy?

D) Geometrické vyjádření faktorového modelu

Dosud jsme pracovali s algebraickým vyjádřením faktorového modelu. Pro pochopení i provádění faktorové analýzy se však ukázalo velmi užitečným vedle algebraického i geometrické vyjádření, které umožňuje vzhled do řady

vztahů, jež jsou v algebraickém vyjádření příliš abstraktní. Ve svých úvahách a debatách si faktoroví analytici často pomáhají kreslením různých diagramů, případně i trojrozměrnými modely z papíru, špejlí apod.¹⁾ Označení jedné z nejdůležitějších procedur faktorové analýzy - rotace - je pochopitelné jen z používání geometrického modelu. Také náš výklad bude podstatně usnadněn, osvojíme-li si geometrický model a budeme-li moci podle potřeby přecházet od algebraického vyjádření ke geometrickému a naopak - i když teoreticky bychom mohli podat celý výklad pouze v algebraické nebo pouze v geometrické formě.

Ve cvičení 3 na str. 34 je uvedena redukovaná faktorová matice. Je vyjádřena algebraicky. Nyní ji převedeme do geometrického "jazyka".

Faktory můžeme narysovat jako souřadnicové osy²⁾, které svírají pravý úhel. Každý z testů nyní vyjádříme jako vektor, jehož koncový bod má souřadnice rovné zátěžím, tedy číslům v příslušném řádku faktorové matice (viz obr. 8).

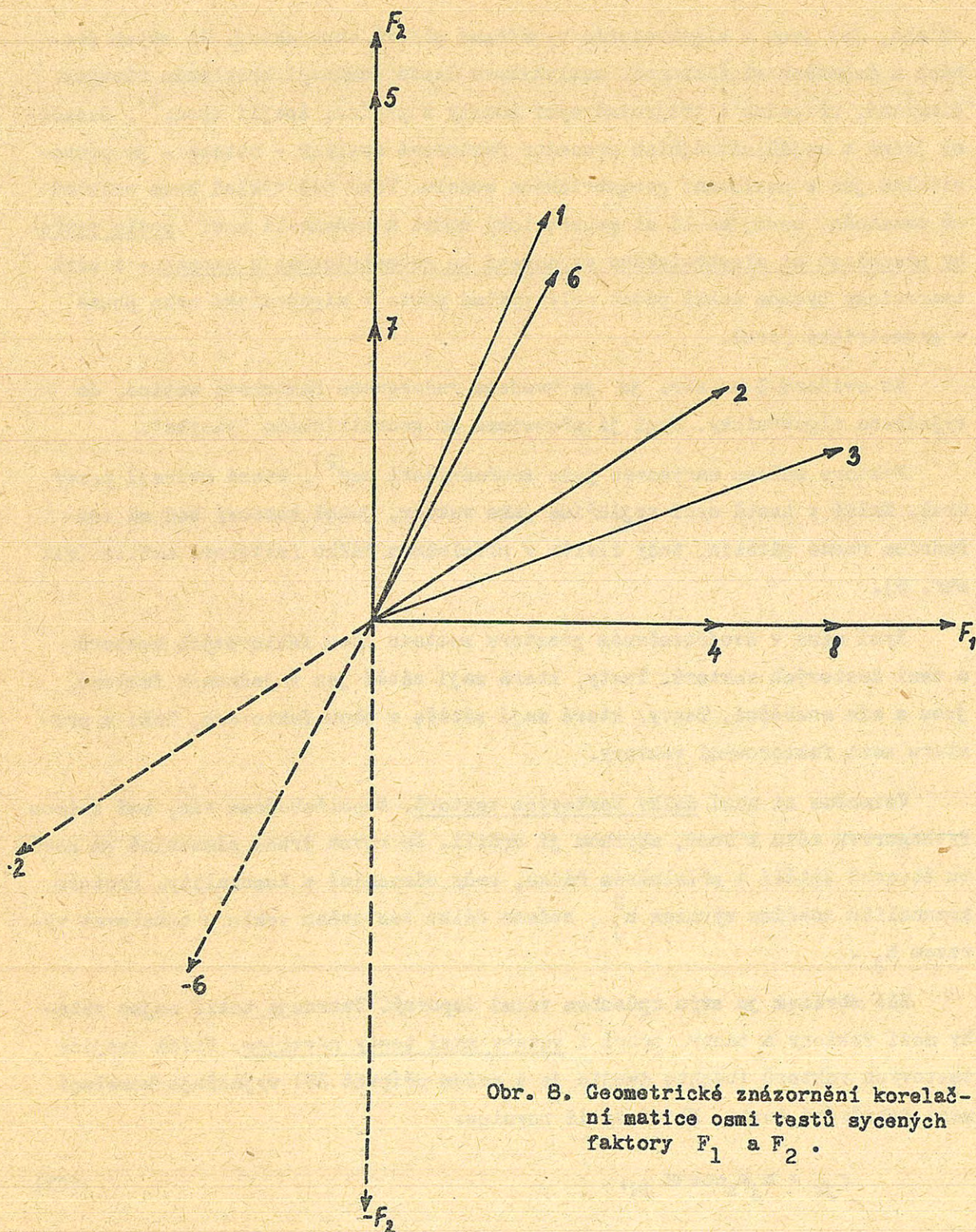
Nyní máme v dvojrozměrném prostoru sestavu dvou faktorových vektorů a osmi testových vektorů. Testy, které mají zátěž jen v jednom z faktorů, jsou s ním souběžné. Testy, které mají zátěže v obou faktorech, leží v prostoru mezi faktorovými vektory.

Všimněme si nyní délky testových vektorů. Nepotřebujeme víc, než známou Pythagorovu větu k tomu, abychom ji určili. Je rovna druhé odmocnině ze součtu čtverců zátěží v příslušném řádku, tedy odmocnině z komunality. Protože komunalitu značíme výrazem h_j^2 , budeme délku testového vektoru označovat výrazem h_j .

Náš obrázek je svým způsobem velmi úsporný. Zahrnuje totiž nejen vztahy mezi faktory a testy, nýbrž i vztahy mezi testy navzájem. Každá dvojice testových vektorů (těchto dvojic je v našem případě 28) vyjadřuje korelaci mezi dotýcnými testy. Platí totiž rovnice:

$$r_{jk} = h_j h_k \cos \alpha_{jk} \quad (23)$$

-
- 1) Nad vchodem do pracovny R.B. Cattella visí takový model - dědictví z Thurstonovy chicagské psychometrické laboratoře. Naproti tomu ti, kdo svěří provedení faktorové analýzy od začátku až do konce matematickému statistikovi nebo prostě standardnímu strojnímu programu, nechápou ani smysl ani potřebu prostorového znázorňování faktorových problémů.
 - 2) Přesněji řečeno, faktory považujeme za vektory o jednotkové délce, které mají stejný směr jako osy souřadnic.



Obr. 8. Geometrické znázornění korelační matice osmi testů sycených faktory F_1 a F_2 .

slovy: korelace mezi kterýmikoli dvěma testy se rovná součinu délek jejich vektorů a kosinu úhlu, který tyto vektory svírají.

Na obr. 8 jsou vyčárkovane označeny dva testové vektory, které vznikly obrácením testových vektorů 2 a 6. V algebraickém vyjádření by tomu odpovídala změna znamének ve dvou řádcích faktorové matice - čímž by se zpětně změnila znaménka ve dvou řádcích a dvou sloupcích korelační matice. Obrátit znaménko

korelačního koeficientu můžeme beze změny jeho významu - až na to, že zatímco dosud šlo například o korelaci mezi inteligencí a dominancí, nyní půjde o korelaci mezi inteligencí a submisí. Takového obrácení znamének ve faktorové matici můžeme použít, je-li to z nějakého důvodu výhodné.

Na obr. 3 je vyčárkovaně označen faktorový vektor, který vznikl obrácením faktorového vektoru F_2 . I zde je zcela lhostejno, ve kterém směru faktorový vektor umístíme. Obratu o 180 stupňů v geometrickém vyjádření ovšem odpovídá změna všech znamének v příslušném sloupci faktorové matice a změna interpretace (slovního označení) faktoru. Šlo-li o faktor extravertze, půjde nyní o faktor introvertze; někdy ovšem můžeme mít potíže s hledáním názvu, obrátíme-li (rotujeme-li) faktor o 180 stupňů.

Uvažme nyní, proč mají faktorové vektory jednotkovou délku, zatímco testové vektory jsou kratší. Začátečník to může přičítat tomu, že faktor je něco "absolutního", "dokonalého", "čistého" atd. Důvod je však čistě matematický. Testové vektory jsou kratší než 1 v prostoru redukované faktorové matice. Vektory, které vidíme na našem obrázku v dvodimenzijní sekci z desíti dimenzí (dva společné faktory a osm jedinečných), jinak řečeno v průmětu do dvou dimenzí, mají ve skutečnosti všechny jednotkovou délku. V ploše určené (bez ohledu na faktory) pouze vektory určitých dvou testů (kterýchkoli dvou testů) by se tato jednotková délka projevila a kosinus úhlu mezi kterýmikoli dvěma testy by byl - v onom příslušném průmětu - roven jejich vzájemné korelaci.

Problém faktorové analýzy je možno - čistě geometricky - vidět takto: Máme danu n -rozměrnou sestavu (testových) vektorů, jež mají počátek v témž bodě a tvoří jakéhosi mnohorozměrného "ježka". Úkol je v tom, najít takový průmět tohoto "ježka" do prostoru o malém počtu dimenzí, který by zachoval co největší délku všech jeho "ostnů".

Všimněme si ještě, že v rovnici (23) nejsou obsaženy vztahy mezi faktory a testy. Náš "ježek" tedy nepředpokládá existenci faktorů. Mohli bychom k němu dojít i takto: Mějme dva testové vektory. Jejich vzájemná korelace odpovídá kosinu úhlu jimi sevřeného. Nyní přidejme vektor třetího testu tak, aby všechny úhly mezi vektory odpovídaly daným korelacím. Tím se dostáváme do trojrozměrného prostoru. Čtvrtý testový vektor o jednotkové délce už zpravidla nelze v trojrozměrném prostoru přidat, jak se můžeme přesvědčit sestavením prostorového modelu odpovídajícího kterékoli empirické korelační matici. Uzavřeme tedy, že konfigurace testových vektorů vyjadřuje korelační matici nezávisle na jakémkoli systému souřadnicových os. - Tím vlastně dospíváme k rotaci faktorů, jak brzy uvidíme.

Cvičení

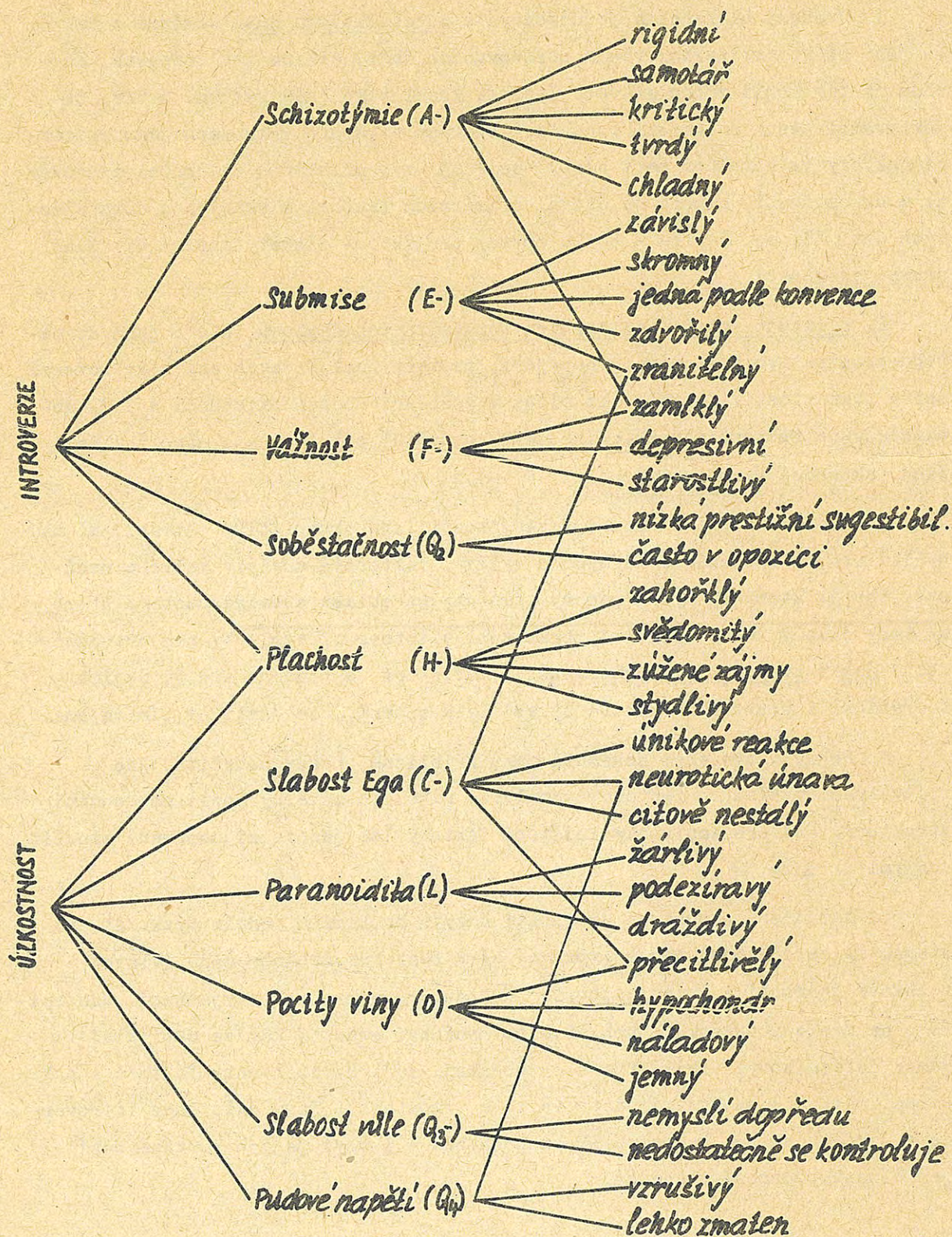
1. Kdy je délka testového vektoru (h_j) rovna faktorové zátěži?
2. Přesvědčte se, že rovnice (23) platí i pro korelaci testu s faktorem (r_{jF}).
3. Jaká je korelace mezi testy -2 a -6 (po obrácení znamének ve faktorové matici)?
4. Vytvořte trojrozměrný model znázorňující tři testové vektory o jednotkové délce. Prohlédněte si stín, který tento model vrhá na stěnu (zblízka, při několik metrů vzdáleném světelném zdroji). Měňte korelace mezi testy. Do dvojrozměrného průmětu svého trojrozměrného modelu umístěte vektory faktorů.
5. Pokuste se sestavit korelační matici čtyř testů, jejichž vektory o jednotkové délce je možno umístit do prostoru o dvou dimenzích!

E) Faktory vyšších řádů

Souřadnicové osy nemusí být vždy vzájemně kolmé. To je v geometrii jen zvláštní případ. V obecném případě svírají souřadnicové osy libovolný úhel. Také ve faktorové analýze se často osvědčuje zavést faktory svírající buď ostré nebo tupé úhly (korelující buď kladně nebo záporně). Tak například faktorováním korelací mezi různými mírami lidského těla (délka prstů, šířka obličeje, objem v bocích, výška ucha, velikost lopatky, rozpětí paží atd.) dospějeme k faktoru tělesné výšky a k faktoru šířky. Tyto faktory budou korelovat, což je zcela přirozené. Podobně koreluje poněkud inteligence s dominancí, sociabilita s impulsivitou atd.

Mohou-li faktory navzájem korelovat a mohou-li mít tyto korelace smysl, je přirozené pokusit se o faktorování těchto korelací. To je faktorová analýza druhého řádu. Při dostatečné odvaze je možno provést i faktorovou analýzu třetího řádu.

Faktorování vyššího řádu se provádí stejně jako analýza prvního řádu. Jeho praktický význam je malý pro velké technické nesnáze (zvláště nespolehlivost odhadu korelací mezi faktory a malý počet faktorů, zejména jasně interpretovatelných, které lze získat v jednom výzkumu). Čtenáři tohoto textu faktorovou analýzu 2. řádu nedoporučujeme. Faktorový model o více než dvou "patrech" (první odpovídá testům, druhé faktorům prvního řádu) má však značný teoretický význam. Jsou na něm založeny tzv. hierarchické faktorové teorie osobnosti.



Obr. 9. Hierarchický systém struktury osobnosti (podle Cattella).

Jako příklad hierarchické teorie osobnostní struktury uvedeme Cattellův systém faktorů (viz obr. 9). K tomuto schématu přičiníme několik poznámek, které jsou důležité pro správné pochopení tohoto i jiných podobných systémů.

1. Uvedená hierarchie je odvozena z dotazníkových dat. Některé z faktorů jsou potvrzeny faktorováním posuzovacích škál, ale ne tak bezpečně, aby-
chom na tom mohli mnoho stavět. Cattell konal také řadu výzkumů s tzv. ob-
jektivními testy osobnosti a faktory získané v těchto výzkumech jako primár-
ní faktory (z korelací mezi testy) se zdají být přibližně na úrovni introver-
ze a úzkostnosti, nikoli na úrovni primárních faktorů získaných z dotazníko-
vých dat. Zdá se, že lze - podle povahy projektu - získat faktory na různé
úrovni obecnosti.

2. Existuje ještě řada dalších dotazníkových faktorů, které jsme do na-
šeho ilustrativního schématu nepojali, protože nemají vztah ani k introverzi
ani k úzkostnosti. Cattell sám mluví v poslední době o existenci asi 23 do-
tazníkových faktorů charakterizujících normální populaci a o několika dal-
ších faktorech patologických.

3. Sloupec napravo obsahuje vlastnosti (charakteristiky chování) až na
určité úrovni zobecnění. Kdybychom vyšli z faktorové analýzy velkého množ-
ství testů, které by byly všechny zaměřeny na oblast submisivnosti a které
by tedy dávaly velmi detailní obraz této vlastnosti, vyšly by nám pravděpo-
dobně ještě subfaktory submisivnosti (závislost, skromnost atd.). Jejich
teoretická i praktická hodnota by asi byla sporná, ale jisti si tím nejsme.

4. Pojmy v uvedeném schématu jsou přibližné, někdy neurčité. Jde
o ilustraci výkladu o faktorové analýze, nikoli o závazný popis osobnostní
struktury. Některé empiricky zjištěné faktory lze jen velmi nepřesně označit
známými termíny.

5. Naznačená struktura osobnosti nebyla prokázána jedním výzkumem, ve
kterém by se došlo od testů (vpravo) až k faktorům druhého řádu (vlevo)
v takové jasnosti a jednoznačnosti, jak sugeruje grafické vyjádření. Jde spí-
íše o ne zcela průkazný souhrn většího množství studií, kdy se například vy-
jde z dotazníkových škál, které se považují za reprezentanty faktorů a z ko-
relací mezi nimi se odvodí introverze a úzkostnost. Sama existence introver-
ze a úzkostnosti je ovšem vcelku nepochybná - i když jejich poznání není
ještě dost podrobné a určité.

Cvičení

1. Čím se liší technika faktorové analýzy druhého řádu od běžného faktoro-
vání korelací mezi testy?
2. V čem jsou největší obtíže faktorové analýzy vyšších řádů?

3. Proč faktory vzájemně korelují?

4. Co odpovídá specifickým faktorům při faktorové analýze druhého řádu?

Kapitola III. EXTRAKCE FAKTORŮ Z KORELAČNÍ MATICE

V předcházející kapitole jsme se zabývali faktorovým modelem a postupovali jsme v podstatě deduktivně. Z hlediska faktorové analýzy to však znamená postup "od konce", od výsledku. Nyní známe svůj cíl a můžeme se ptát, jak ho dosáhnout.

Úkolem faktorové analýzy je odvození faktorů z korelací, z korelační matice. Tento proces má dvě hlavní fáze: extrakci a rotaci. Extrakce faktorů vede k faktorové matici, v níž je - až na malé residuum - obsaženo stejné množství informací jako v korelační matici. Často se mluví o kondenzaci korelační matice ve faktorovou matici, protože faktorová matice je zpravidla daleko menší a přehlednější než výchozí korelační matice.

Faktorovou matici, která je výsledkem extrakce, nazýváme nerotovanou. Tím už naznačujeme, že analýza není u konce, že je třeba ještě provést tzv. rotaci. Tou se budeme zabývat v následující kapitole.

A) Centroidní metoda (návod k výpočtu)

Domníváme se, že - vzhledem k rozšířenému používání samočinných počítačů - bude málokdo provádět extrakci faktorů na "kalkulačce" nebo dokonce "ručně". Kromě toho není pro psychologa důležité, aby rozuměl procesu extrakce matematicky. Může se v tom plně spolehnout na matematika. Přesto zaznamenáme výpočetní návod k extrakci faktorů z miniaturní korelační matice, protože někteří čtenáři se budou cítit ve faktorové analýze bezpečněji, budou-li vědět, že ji dovedou provést od začátku až do konce.

Použijeme centroidní metody, která je velmi jednoduchá a výpočetně snadná. Umožňuje také jistý "intuitivní" vhled do procesu extrakce faktorů. Metoda hlavních os, které se dnes běžně používá a která je o něco přesnější, je bez samočinného počítače takřka neproveditelná.

Budeme faktorovat korelační matici z tabulky 5. První fáze postupu je naznačena v tab. 6. Především si povšimneme hodnot v diagonále. Jedničky jsou nahrazeny odhadnutými komunalitami. Použili jsme nejjednodušší metody odhadu: za komunalitu považujeme nejvyšší hodnotu v příslušném řádku, tj. nejvyšší korelaci, které ten který test dosahuje.

Tabulka 5. Korelační matice ke cvičné centroidní extrakci faktorů

	1	2	3	4	5
1	1,00	0,00	-0,42	0,54	-0,12
2	0,00	1,00	-0,32	0,00	-0,64
3	-0,42	-0,32	1,00	-0,63	0,46
4	0,54	0,00	-0,63	1,00	-0,18
5	-0,12	-0,64	0,46	-0,18	1,00

Tabulka 6. Upravená korelační matice s naznačeným výpočtem

1. centroidního faktoru

	1	2	-3	4	-5	
1	0,54	0,00	0,42	0,54	0,12	
2	0,00	0,64	0,32	0,00	0,64	
-3	0,42	0,32	0,63	0,63	0,46	
4	0,54	0,00	0,63	0,63	0,18	
-5	0,12	0,64	0,46	0,18	0,64	
s_j	1,62	1,60	2,46	1,98	2,04	$T = 9,70$
a_{j1}	0,5202	0,5137	0,7899	0,6357	0,6550	

Část korelačních koeficientů v tabulce 5 je záporná. Těchto záporných čísel se zbavíme. Víme již, že smysl každého testu můžeme obrátit. Test, který měří inteligenci, můžeme nazvat "nedostatek inteligence", obrátíme-li normovací tabulky tak, aby se za horší výkon dávala vyšší známka. Změníme-li směr měření, změní se také všechny korelace příslušného testu se všemi jinými testy. Jejich absolutní hodnota zůstane stejná, změní se však jejich znaménko. Můžeme tedy předpokládat, že jsme u některých testů takovou změnu provedli a změnit v jejich řádku a sloupci v korelační matici všechna znaménka. Když to provedeme v našem případě s třetím a pátým testem, zmizí všechna záporná znaménka a dostaneme korelační matici uvedenou v tabulce 6. Všimněme si, že u pořadových čísel třetího a pátého testu máme nyní záporné znaménko.

Obrácení každého testu je třeba zaznamenat. (Někdy dochází v průběhu extrakce k několika změnám znaménka u téhož testu.)

Představme si teď výsledek, kterého chceme dosáhnout - uspořádání n testových vektorů v prostoru m ortogonálních společných faktorů. Souřadnice koncových bodů testových vektorů v souřadnicové soustavě tvořené nezávislými faktory jsou totožné s faktorovými zátěžemi. Půjde tedy o n bodů určených souřadnicemi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Centroid je totéž co těžiště. A centroidní metoda se tak jmenuje proto, že jejím principem je postupné prokládání faktorů těžištěm skupiny koncových bodů v m -, $(m-1)$ -, ... až jednorozměrného prostoru.

Souřadnice těžiště uvažovaných bodů v m -rozměrném prostoru jsou:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{k1}, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{k2}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{km} \right).$$

Protože tímto těžištěm chceme proložit první faktor (první osu souřadnic), musí být druhá až m -tá souřadnice těžiště nulová, tj. musí platit

$$\sum_k a_{k2} = \sum_k a_{k3} = \dots = \sum_k a_{km} = 0.$$

Abychom odvodili návod, jak vypočítat první souřadnice n koncových bodů, tj. hodnoty $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$, musíme se vrátit k základní rovnici faktorové analýzy, vyjadřující korelaci mezi dvěma proměnnými pomocí faktorových zátěží:

$$r_{jk} = a_{j1}a_{k1} + a_{j2}a_{k2} + \dots + a_{jm}a_{km} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

Sečteme-li všechny korelace v j -tém řádku redukované korelační matice (včetně diagonálního prvku $h_j^2 = a_{j1}^2 + \dots + a_{jm}^2$), dostaneme

$$\sum_k r_{jk} = a_{j1} \sum_k a_{k1} + \dots + a_{jm} \sum_k a_{km} \quad (j = 1, \dots, n).$$

S výjimkou prvního jsou všechny členy na pravé straně rovny nule, můžeme proto psát

$$\sum_k r_{jk} = a_{j1} \sum_k a_{k1} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Dalším sečtením - přes j - dostáváme:

$$\sum_j \sum_k r_{jk} = \left(\sum_k a_{k1} \right) \sum_j a_{j1} = \left(\sum_k a_{k1} \right)^2$$

Z posledních dvou vztahů už je jasný vzorec pro výpočet zátěží prvního centroidního faktoru:

$$a_{j1} = \frac{\sum_k r_{jk}}{\sqrt{\sum_j \sum_k r_{jk}}} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Zátěž j -té proměnné je tedy rovna součtu korelací v j -tém řádku (nebo sloupci) děleném odmocninou ze součtu všech prvků redukované korelační matice.

Pro náš příklad je výpočet naznačen v tab. 6. Součty jednotlivých sloupců jsou zapsány v řádku označeném S_j . Celkový součet $T = 9,70$. Zátěže a_{j1} uvedené v dalším řádku jsou pak počítány podle vzorce:

$$a_{j1} = \frac{S_j}{\sqrt{T}} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Po patřičných změnách znamének tyto hodnoty zapíšeme do prvního sloupce faktorové matice (tab. 7).

Tabulka 7. Faktorová matice, získaná jako výsledek centroidní extrakce z korelační matice v tabulce 5

	F_1	F_2
1	0,5202	-0,4336
2	0,5137	-0,5834
3	-0,7899	-0,1818
4	0,6357	0,5465
5	-0,6550	0,4996

Dalším krokem je výpočet reziduálních korelací po prvním faktoru, tj. hodnot

$$l_{jk} = r_{jk} - a_{j1} a_{k1} = a_{j2} a_{k2} + a_{j3} a_{k3} + \dots + a_{jm} a_{km}$$

Maticově zapsáno, výpočet matice

$$R_1 = R - Q_1,$$

kde Q_1 je matice s prvky $a_{j1} a_{k1}$. Spočítáme tedy nejdříve matici Q_1 (v diagonále jsou čtverce faktorových zátěží, mimo diagonálu jejich součiny) a tu pak odečteme od výchozí (upravené) korelační matice. Reziduální korelační matice obsahuje tab. 8.

Tabulka 8. Reziduální korelační matice po extrakci
1. centroidního faktoru

	1	2	-3	4	-5
1	0,2694	-0,2672	0,0091	0,2093	-0,2207
2	-0,2672	0,3761	-0,0858	-0,3266	0,3035
-3	0,0091	-0,0858	0,0061	0,1279	-0,0574
4	0,2093	-0,3266	0,1279	0,2259	-0,2364
-5	-0,2207	0,3035	-0,0574	-0,2364	0,2110

Reziduální korelační matici máme vysvětlit pomocí dalších $(m-1)$ faktorů.

Při extrakci druhého centroidního faktoru postupujeme podobným způsobem jako při extrakci prvního: Těžištěm n koncových bodů testových vektorů proložíme v $(m-1)$ -rozměrném prostoru druhý faktor, kolmý k předchozímu.

Musíme si však uvědomit jednu potíž, na kterou v této souvislosti narazíme: Reziduální $(m-1)$ -rozměrný prostor je kolmý k prvnímu centroidnímu faktoru, tj. první souřadnicové ose, na níž leží těžiště. Proto jsou v reziduálním prostoru souřadnice těžiště nulové.

Jasnější to bude algebraicky: Souřadnice koncových bodů vektorů proměnných teď jsou

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\begin{pmatrix} a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

a souřadnice jejich těžiště

$$\frac{1}{n} \sum_j a_{j2}, \frac{1}{n} \sum_j a_{j3}, \dots, \frac{1}{n} \sum_j a_{jm}$$

Podle předpokladu ze str. 44 jsou to samé nuly. Těžiště v tomto (m-1)-rozměrném prostoru tedy leží v počátku a postup, který jsme užívali pro stanovení prvních souřadnic, není pro výpočet hodnot a_{j2} přímo použitelný.

Tato potíž se překonává prostým trikem - otočením některých proměnných. Změníme-li o 180° směr některých testových vektorů, změníme pochopitelně i konfiguraci jejich koncových bodů a její těžiště tím posuneme z počátku. Pak už budeme moci při extrakci druhého faktoru postupovat zcela stejně jako při extrakci prvního.

Při změnách orientace některých testů máme pochopitelně zájem na tom, aby těžiště celkové konfigurace n koncových bodů bylo posunuto od počátku co nejdále. Zpřesňuje se tím totiž poloha druhého faktoru, který pak také vyčerpá větší část celkové variance proměnných. Největšího posunu docílíme, když z reziduální korelační matice odstraníme pokud možno všechna záporná znaménka. (Podobně a za podobným účelem jsme upravovali už výchozí korelační matici.) Pro tabulku 8 toho docílíme, změníme-li znaménka druhé a páté proměnné.

Upravená reziduální matice je uvedena v tabulce 9.

Tabulka 9. Reziduální korelační matice upravená pro extrakci
2. centroidního faktoru s naznačeným výpočtem

	1	-2	-3	4	5
1	0,2672	0,2672	0,0091	0,2093	0,2207
-2	0,2672	0,3266	0,0858	0,3266	0,3035
-3	0,0091	0,0858	0,1279	0,1279	0,0574
4	0,2093	0,3266	0,1279	0,3266	0,2364
5	0,2207	0,3035	0,0574	0,2364	0,3035
S_j	0,9735	1,3097	0,4081	1,2268	1,1215
					$T = 5,0396$
a_{j2}	0,4336	0,5834	0,1818	0,5465	0,4996

Komunality jsou znovu odhadnuty jako nejvyšší hodnoty v příslušných řádcích. Proměnná č. 2 má znaménko -, proměnná č. 5 znaménko +, protože jsme jí no-

vou změnou znamének vrátili původní orientaci. (Proměnná č. 3 si zachovává záporné znaménko z předchozího kroku.)

Výpočet zátěží druhého centroidního faktoru se provádí přesně stejně jako u prvního; hodnoty a_{j2} z posledního řádku tab. 9 po změnách znamének přepíšeme do druhého sloupce faktorové matice (tab. 7).

Nyní vypočítáme druhou reprodukovanou korelační matici a odečteme ji výše popsáním způsobem od reziduální matice uvedené v tab. 9. Tím dostáváme druhou reziduální korelační matici (viz tab. 10). Hodnoty v této matici jsou prakticky nulové, proto dále nefaktorujeme. Kdyby v ní byly dostatečně vysoké hodnoty, faktorování by pokračovalo dalším krokem, stejným, jako byl druhý krok.

Tabulka 10. Druhá reziduální korelační matice

	1	-2	-3	4	5
1	0,0792	0,0142	-0,0697	-0,0277	0,0041
-2	0,0142	-0,0138	-0,0203	0,0078	0,0120
-3	-0,0697	-0,0203	0,0948	0,0285	-0,0334
4	-0,0277	0,0078	0,0285	0,0279	-0,0366
5	0,0041	0,0120	-0,0334	-0,0366	0,0539

B) Další metody extrakce faktorů

Centroidní metody můžeme použít, chceme-li se rychle orientovat v malé korelační matici. Nemáme-li snadný přístup k počítači, můžeme takto faktorovat i korelační matice obsahující přes 20 testů. V Thurstonově psychometrické laboratoři se centroidně faktorovaly i matice obsahující více než 60 testů, což ovšem vyžaduje velmi mnoho času, trpělivosti a výpočtářské přesnosti.

Samočinné počítače umožňují použití mnohonásobně náročnějších metod, např. dnes nejčastěji užívané metody hlavních os (principal axis method) i nejmodernější, ale i na počítačích neúměrně časově náročné metody Lawleyovy.

Velká většina současných faktorových studií používá pro extrakci faktorů metodu hlavních os. Její pochopení vyžaduje důkladnější znalost maticové algebry. Nebudeme se jí zde zabývat podrobněji, protože pro jen trochu větší korelační matice je bez samočinného počítače prakticky nezvládnutelná.

$$\begin{vmatrix} (h_1^2 - \lambda) & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & (h_2^2 - \lambda) & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & (h_3^2 - \lambda) & \dots & r_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & (h_n^2 - \lambda) \end{vmatrix} = |R - \lambda I| = 0$$

Rozvineme-li tento determinant, dostaneme mnohočlen n -tého stupně - tzv. charakteristický polynom matice R .

V maticové algebře je rovnice $|R - \lambda I| = 0$ nazývána charakteristickou rovnicí. Je to rovnice n -tého stupně s neznámou λ , o jejích vlastnostech existuje dosti rozsáhlá matematická teorie. Pro nás stačí, že všechny její kořeny - tzv. charakteristická nebo také vlastní čísla - jsou reálné a dosazení kořenu zredukuje hodnotu matice soustavy, takže soustava rovnic má pak nenulové řešení.

Protože neznámá λ je rovna $\sum a_{j1}^2$, tedy výrazu V_1 , který máme maximalizovat, musíme pro extrakci prvního hlavního faktoru použít největšího z kořenů λ_1 . Po jeho dosazení do soustavy homogenních rovnic (jež pak má nekonečně mnoho řešení, která jsou všechna úměrná jednomu, tj. vyjádřitelná jako $c[\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{n1}]$), stačí pak její libovolné řešení $[\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{n1}]$ upravit tak, aby součet čtverců složek tohoto vektoru byl roven λ_1 , tj. dělit jednotlivé složky $\sqrt{\sum \alpha_{j1}^2}$ a násobit $\sqrt{\lambda_1}$:

$$a_{j1} = \alpha_{j1} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\sum \alpha_{j1}^2}} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Druhý hlavní faktor by se měl extrahovat z matice $R_1 = R - Q_1$, tj. z reziduálních korelací po prvním faktoru ($Q_1 = a_1 a_1'$). Když uijeme na matici R_1 téhož postupu jako na R , zjistíme, že s výjimkou λ_1 jsou vlastní čísla R_1 totožná s charakteristickými čísly R . Jinak řečeno: pro extrakci druhého faktoru není třeba pracovat s reziduální maticí R_1 a hledat její největší vlastní číslo, ale stačí vzít λ_2 , tj. podle velikosti v pořadí druhé největší vlastní číslo původní matice R . Totéž pochopitelně platí pro třetí a další hlavní faktory.

Každému vlastnímu číslu R tedy odpovídá jeden faktor, přičemž jeho příspěvek k celkové varianci proměnných je roven právě tomuto charakteristickému číslu.

Napišme si soustavu rovnic, ze kterých získáváme hodnoty a_{jp} , ještě jednou:

$$(R - \lambda I) \alpha = 0$$

(α je sloupcový vektor jakéhokoli řešení této rovnice)

Po roznásobení dostaneme vztah

$$R \alpha - \lambda \alpha = 0,$$

respektive

$$R \alpha = \lambda \alpha.$$

Tento vztah se pro definici charakteristických čísel často užívá v matematice, protože dovoluje kromě nich definovat také tzv. charakteristické vektory α , pro něž platí. Všimněme si, že faktory jsou vlastně také charakteristické vektory - upravené tak, aby $\sum_j a_{jp}^2 = \lambda_p$.

Zadávali-li tedy psycholog řešení metodou hlavních os matematikovi nebo programátorovi, který sám faktorovou analýzu nezná, stačí předat mu korelační matici R s pokud možno dobře odhadnutými diagonálními prvky (zejména u menších matic, u větších je možno začínat i s jedničkami) s požadavkem, aby určil charakteristická čísla a vektory této matice. Ve většině případů najde na tuto úlohu v knihovně programů program už hotový (obvykle tzv. Jacobiho metoda diagonalizace reálné symetrické matice). Charakteristické vektory je ovšem ještě třeba upravit tak, aby součet čtverců jejich složek byl roven příslušnému charakteristickému číslu. Pak už zbývá "jen" určit, kolik faktorů je třeba vzít v úvahu, event. požádat o nový výpočet s přesnějšími odhady komunalit.

Zbývá říci, jak výsledky obvykle vypadají. Pokud vycházíme z matice s jedničkami v diagonále, je obvykle $m = n$, tj. počet faktorů roven počtu proměnných; jinými slovy - charakteristická čísla jsou všechna kladná. Pokud dosazujeme do diagonály R odhady komunalit, měla by být - pokud jsou odhady dobré - vlastní čísla nezáporná, při přesných odhadech by jich mělo být právě m kladných (a zbývajících $n - m$ rovných nule). V praxi obvykle nejsou odhady tak kvalitní, aby to opravdu vyšlo takto přesně. Proto se pak pro určení počtu faktorů užívá různých (přibližných) metod, o nichž se zmiňujeme na jiném místě.

C) Odhad komunalit a stanovení počtu faktorů

1. Odhad komunalit

Při centroidní extrakci faktorů z miniaturní korelační matice, kterou jsme provedli na str. 42, jsme dosadili do diagonály jako komunalitu prostě nejvyšší hodnotu v příslušném sloupci (či řádku, což je totéž). To je nejjednodušší a nejhrubší odhad.

Byly navrženy přesnější metody odhadu komunalit, přičemž však není jisto, která je nejlepší. Např. je možno odhadnout komunalitu jako čtverec vícenásobné korelace mezi daným testem a všemi ostatními testy v matici.

Další zpřesnění je možné iterativní metodou: Komunality se určí z výsledné faktorové matice, dosadí se do diagonály korelační matice a faktoruje se znovu. Tento proces je třeba opakovat několikrát. Po každém opakování se kontroluje, jak se komunality změnily. Jsou-li změny zanedbatelně malé, považují se komunality za definitivní.

Zajímavý problém, který však přesahuje rámec těchto prolegomen, vzniká, jestliže iterativní stanovení komunalit vede k různým výsledkům podle toho, s jakým odhadem začneme. Rozdíly bývají nepatrné a pro praktické používání metody bezvýznamné.

2. Počet extrahovaných faktorů

Kolik faktorů extrahujeme z dané korelační matice? V našem případě jsme po extrakci druhého faktoru zřetelně viděli, že reziduální korelace jsou prakticky nulové. To však je konec konců přece jen subjektivní odhad, který může být - zvláště u velkých korelačních matic - nespolehlivý. Nejjednodušší je prozkoumat po extrakci každého faktoru reziduální korelační matici. Jestliže rozložení reziduálních korelací odpovídá náhodnému rozložení korelací při daném počtu osob, lze faktorování považovat za skončené.

V současné době se používá přesnějších odhadů pro počet faktorů, jež mají být extrahovány z dané korelační matice. Je možno doporučit Kaiser-Guttmanovo kritérium. Při jeho použití se nejprve vypočítají vlastní hodnoty korelační matice při jedničkách v diagonále a počet faktorů se určí jako počet vlastních čísel větších než 1. Při velkých korelačních maticích však tato metoda snadno vede k extrakci nadměrného počtu faktorů.

Je třeba upozornit na mylnou domněnku, že neškodí, extrahujeme-li z korelační matice méně nebo naopak více faktorů, že nadbytečné faktory stejně

nakonec nějak odpadnou jako bezvýznamné nebo že - při extrakci menšího počtu - poslední statisticky významné faktory jsou už stejně relativně nedůležité. V konečném rotovaném řešení i první, "větší" faktory vycházejí poněkud v závislosti na počtu extrahovaných faktorů. Cattell dokonce vysvětluje některé dosti významné rozdíly mezi svými výsledky a výsledky H.J. Eysencka tím, že Eysenck extrahuje méně faktorů, než by bylo záhodno. Cattell ovšem často překračuje počet faktorů stanovený Kaiser-Guttmanovým kritériem a v jeho studiích se chronicky objevuje více faktorů, než by ze stejných korelačních matic extrahovali jiní badatelé. Počet faktorů u něj někdy dokonce dosahuje poloviny počtu testů, což je podle většiny autorit nepřijatelné.

Určení počtu faktorů je poněkud závislé na odhadu komunalit. Obecně platí, že čím výše stanovíme komunalitu, tím větší počet faktorů vychází. Naopak určíme-li napřed počet faktorů, jsou tím do značné míry dány také komunality. Při větším počtu testů (a zejména obsahuje-li korelační matice řadu vysokých hodnot) hraje tato souvislost nepatrnou roli.

3. Metodologická pochybnost

Ve faktorové analýze se zpravidla snažíme o maximální kondenzaci korelační matice, to znamená o její převedení na faktorovou matici o co nejmenším počtu faktorů. Tato zásada, zavedená Spearmanem, zcela převládla. Pokud platí, je stanovení počtu faktorů i celá procedura extrakce zcela v rukou matematiků, protože jde o jednoznačně zadaný úkol.

Avšak již před mnoha lety upozornil Godfrey H. Thomson, že zásada minimálního počtu faktorů zároveň maximalizuje úlohu specifických faktorů.

Při malém počtu testů můžeme s přehledem uvážit následující příklad. Máme korelační matici ze tří testů (tab. 11). Dosadíme-li do diagonály hodnoty 0,36, dostaneme centroidní metodou snadno výsledek: jediný faktor, sytící všechny tři testy stejně. Řešení je jednoduché, na první pohled optimální. Podívejme se však nyní na tab. 12, kde je uvedena faktorová matice o třech společných faktorech a třech testech. Snadno se přesvědčíme, že korelační matice vypočítaná známou metodou z této faktorové matice je - opět matice z tab. 11! Kdybychom do diagonály této korelační matice dosadili hodnoty 0,72, dostali bychom (po rotaci) tři faktory z tabulky 12.

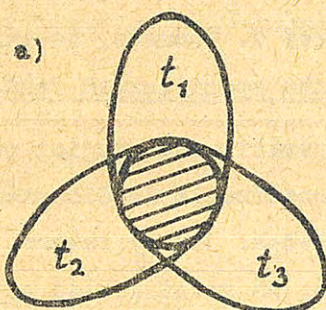
Tabulka 11. Korelační matice a její nejjednodušší faktorové řešení

	1	2	3		F_1
1	1,00	0,36	0,36	1	0,6
2	0,36	1,00	0,36	2	0,6
3	0,36	0,36	1,00	3	0,6

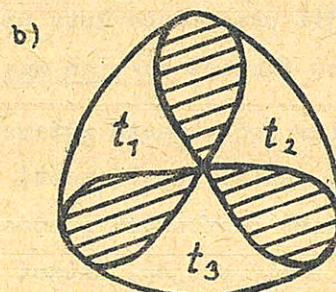
Tabulka 12. Faktorová matice vyhovující korelační matici z tab. 11

	F_1	F_2	F_3
1	0,6	0,6	0,0
2	0,6	0,0	0,6
3	0,0	0,6	0,6

Godfrey H. Thomson užíval s oblibou pro podobné úvahy obrázků, ve kterých byly korelace znázorněny jako překryvy ploch. Faktorové řešení z tabulky 11 můžeme znázornit překryvem tří elips v jednom místě (jde o tři splývající průniky), tabulku 3 třemi odlišnými překryvy - viz obr. 10.



Obr. 10a. Jediný společný faktor



Obr. 10b. Tři společné faktory

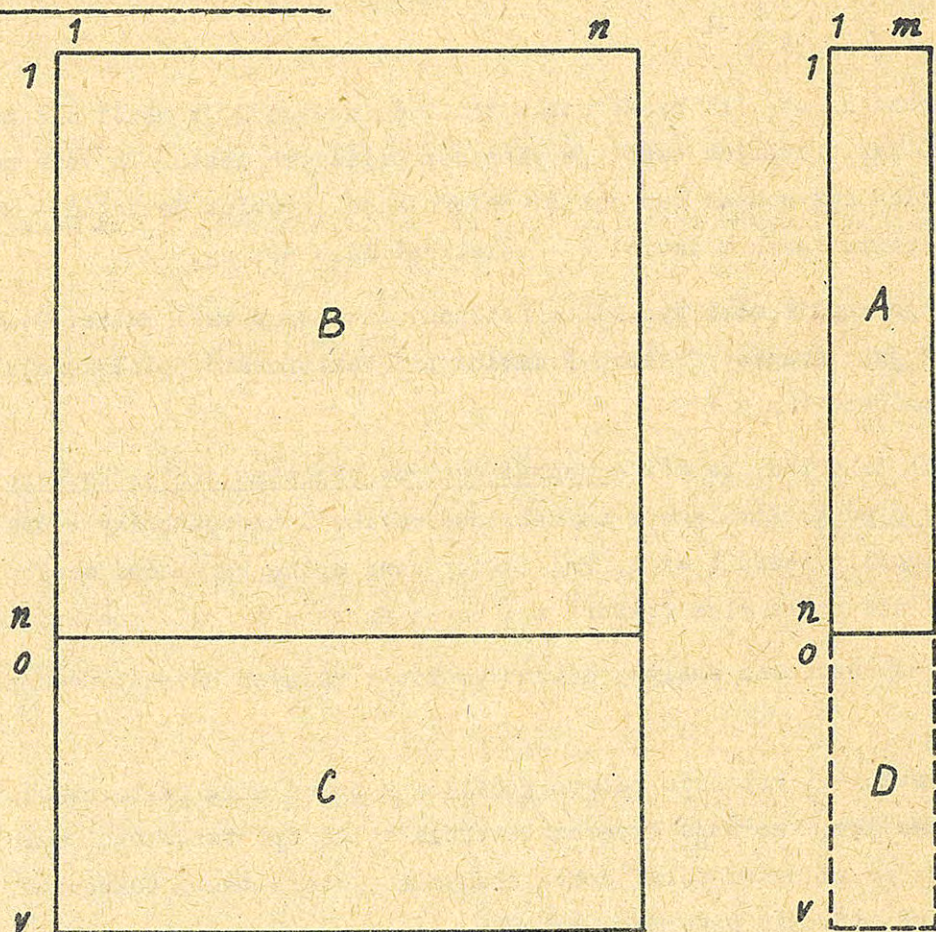
Obr. 10. Grafické znázornění dvojího faktorového složení tří testů: obojí faktorové složení vede ke stejným korelacím (viz tab. 11. a tab. 12.)

Na uvedeném příkladě jsme ukázali¹⁾, že snaha o minimální počet faktorů může vést k mylným výsledkům. Jinak řečeno: předpoklad, že minimální počet faktorů povede k nejlepšímu řešení, je už hypotéza, která nemusí být správná.

1) Je možno to také dokázat obecně.

Rozhodně čtenáři nedoporučujeme, aby z naší metodologické pochybnosti vyvodil praktické závěry a dosazoval komunality podle svých hypotéz¹⁾. Dostal by se brzy do nesnází, o nichž - je-li ve faktorové analýze začátečníkem - nemá představu. Metody odhadu komunalit a určování počtu faktorů, které jsme uvedli, jsou osvědčené a není radno uchýlovat se od nich bez dostatečných důvodů a bez hlubokého pochopení faktorové analýzy. Chceme však již na tomto místě zdůraznit to, k čemu se ještě nejdnou vrátíme: Faktorová matice je vždy jedním z nekonečného počtu možných řešení korelační matice. Vždycky si musíme být vědomi: takto může to být, ale je to řešení, které se musí prosadit konec konců svou psychologickou přesvědčivostí, nikoli jen svou matematickou elegancí a úsporností.

D) Dwyerova extensní analýza



Obr. 11. Matice vstupující do Dwyerovy extensní analýzy (A, B, C) a výsledná matice D. (Vysvětlení v textu.)

1) Chce-li tak přes naše varování učinit, nechť pamatuje, že komunalita nemůže být vyšší než spolehlivost daného testu, tj.

$$h^2 \leq r_{jj}.$$

Jestliže jsme faktorovali korelační matici a máme k dispozici ještě korelace mezi testy této matice a dalšími testy, můžeme zjistit faktorové zátěže těchto dalších testů.

Objasníme nejprve danou situaci obrázkem (viz obr. 11, str. 55). Předpokládejme, že jsme faktorovali korelační matici o n testech. Je označena písmenem B . K této korelační matici přiléhá matice C . V ní jsou korelace mezi testy 1 až n a testy o až v . Výsledkem faktorové analýzy korelační matice B je faktorová matice A (nerotovaná). Pod faktorovou maticí A je čárkovane přikreslena matice D , která je jejím pokračováním, "extenzí". Výpočet této matice je naším úkolem.

Řešení je v podstatě snadné. Výchozí rovnice je

$$C = DA' \quad (24)$$

odtud vypočítáme, že

$$D = CA (A'A)^{-1}. \quad (25)$$

Ze znázornění na obr. 11 by se mohlo zdát, že matice D je menší než matice A , že původně faktorovaných testů je více než přidaných testů. To však není nutné. Může jich být naopak bez obtíží daleko více. Výpočet je totiž - zvláště při malém počtu testů v matici B - relativně málo pracný.

Jaký je rozdíl mezi výsledkem extensní analýzy a mezi maticí D , která by vznikla jako součást faktorové matice při faktorování úplné korelační matice o rozměrech $v \times v$?

Rozdíl je v tom, že při extenzní analýze nebereme zřetel ke korelacím mezi testy o až v . Korelace v asymetrické matici C nejsou brány v úvahu při odhadu komunalit testů 1 až n . Při faktorování úplné korelační matice by tedy zpravidla vyšlo více faktorů a i první faktory by byly poněkud odlišné.

Dwyerovy extenzní analýzy můžeme použít z různých důvodů. Uvedeme tři z nich:

1. Nestačí-li kapacita našeho počítače k normálnímu faktorování velké korelační matice, umožňuje Dwyerova extenze zvládnout tento úkol aspoň přibližně. Musíme si ovšem velmi dobře rozmyslet, které testy faktorovat a které dodatečně připojit Dwyerovou metodou.

2. Faktorování celé korelační matice by vedlo k nepřehledným výsledkům. Tak by tomu mohlo být zvláště při faktorování velkého množství dotazníkových položek. Pak je možno faktorovat jen vhodně utvořené dotazníkové škály a extensní analýzou připojit zátěže položek. Tohoto postupu lze použít při náročné položkové analýze.

3. Část testů, které faktorujeme, tvoří homogenní skupinu odpovídající pravidlům pro výběr testů (viz str.105). Další proměnné nás také zajímají, ale jejich včlenění do korelační matice by mohlo vést k artefaktům, např. jde-li o experimentálně závislé testy.

Je samozřejmé, že výsledek extensní analýzy, matici D, můžeme také rotovat, a to buď společně s maticí A nebo dodatečně (tak, že ji násobíme transformační maticí, k níž jsme došli rotací matice A); jak si počínat v jednotlivých případech, záleží na řadě okolností, zvláště na povaze projektu.

Cvičení

1. Vypočítejte z tab. 7 komunality všech pěti testů.
2. Dosaďte výsledek cvičení 1. do korelační matice v tab. 6 jako diagonální hodnoty a proveďte extrakci prvních dvou faktorů.
3. Cvičná tabulka 5 vznikla uměle z této vymyšlené faktorové matice:

0,6	0,0
0,0	0,8
-0,7	-0,4
0,9	0,0
-0,2	-0,8

Známe tedy skutečné komunality. Vypočítejte je a máte-li trpělivost, proveďte znovu extrakci dvou faktorů (tentokrát ponechejte pro extrakci 2. faktoru diagonální hodnoty první reziduální korelační matice). Porovnejte odhady se skutečnými komunalitami.

Kapitola IV. ROTACE FAKTORŮ

A) Možnost nerotovat

Rotace je proces, pro který chybí - jak se brzy podrobně dozvíme - spolehlivé objektivní vodítko. Proto můžeme být v pokušení vyhnout se mu a spojit se nerotovanými faktory, tak jak je získáme centroidní metodou nebo metodou hlavních os. Je to možné? Má to nějaký smysl?

Za určitých okolností může mít smysl nerotovaný první faktor. Například máme-li několik testů rigidity a jsme-li přesvědčeni, že rigidity je právě to, co se uplatňuje v jejich korelacích, pak z nich můžeme sestavit korelační matici, faktorovat ji a považovat první faktor za faktor rigidity. Zátěže tohoto faktory by pak sloužily ke stanovení vah pro výpočet rigidity u jednotlivců.

Až na uvedený případ a jiné vzácné výjimky musíme nerotované faktory považovat za pouhý mezistupeň na cestě ke smysluplnému faktorovému řešení. K tomu nás vedou teoretické úvahy i praktická zkušenost.

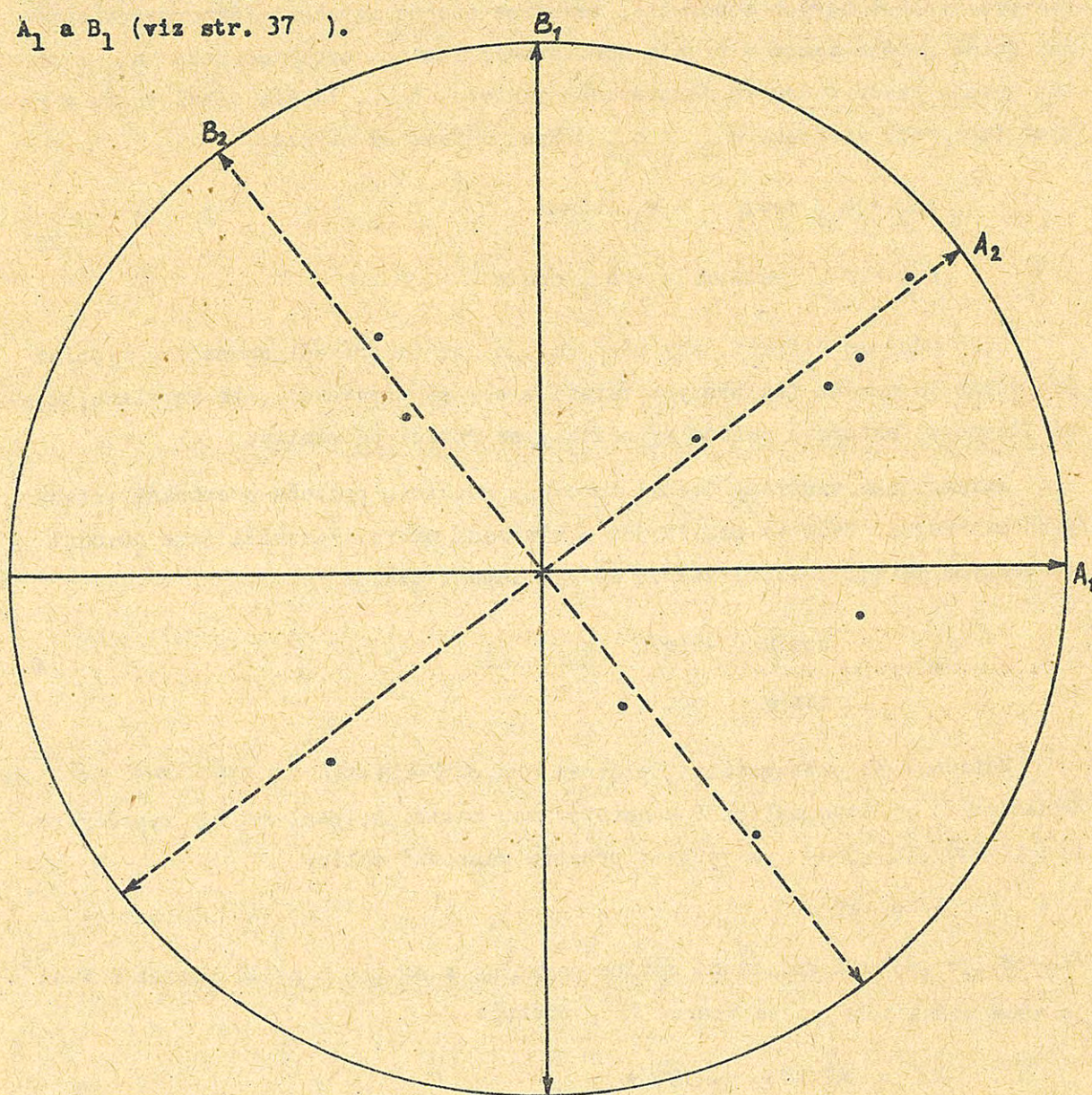
B) Úvodní příklad

Vyjdeme z faktorové matice uvedené v tab. 13. Jsou zde dva faktory

Tabulka 13. Faktorová matice pro úvodní příklad k rotaci faktorů

	A	B
1	-0,25	0,30
2	0,70	0,55
3	-0,30	0,45
4	0,60	0,40
5	-0,40	-0,35
6	0,30	0,25
7	0,40	-0,50
8	0,55	0,35
9	0,15	-0,25
10	0,60	-0,10

a deset testů. Jak již víme, můžeme tuto faktorovou matici vyjádřit také geometricky (viz str. 34). To je provedeno na obr. 12. Víme také, že korelace mezi testy jsou nezávislé na tom, jak jsou umístěny faktorové vektory A_1 a B_1 (viz str. 37).



Obr. 12. Úvodní příklad k rotaci faktorů. Nerotované faktory: A_1 , B_1 , rotované faktory A_2 , B_2 .

Toho hned využijeme. Zvolíme si - z důvodů, které vysvětlíme později - jiné osy souřadnic, tj. jiný referenční systém, jiné faktory. Provedeme to pootočením starého souřadnicového systému. Nové souřadnicové osy povedeme tak, jak je vyznačeno čárkovaně a souběžně s nimi vedeme nové faktory A_2 a B_2 . Faktor A_2 má ve starém referenčním systému souřadnice $\cos \alpha$ a $\sin \alpha$ (0,80 a 0,60), faktor B_2 má souřadnice $-\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ (-0,60 a 0,80), přičemž α je ovšem úhel, o který jsme souřadnicové osy (faktory) pootočili.

Nyní můžeme vypočítat novou, "rotovanou" faktorovou matici, neboli nové

souřadnice všech bodů uvedených v obr. 12 - což jsou koncové body testových vektorů. (Znovu si všimněme, že s testovými vektory a jejich vzájemnými vztahy se přitom nic nemění - rotujeme pouze faktory.) Abychom mohli napsat vzorek pro výpočet nových souřadnic, zavedeme obecné označení faktorových zátěží. Zátěž j -tého testu v prvním nerotovaném faktoru označíme jako a_{j1} , zátěž j -tého testu v druhém nerotovaném faktoru b_{j1} . Zátěže téhož testu v nových faktorech značíme a_{j2} a b_{j2} . Nyní můžeme už napsat:

$$\begin{aligned} a_{j2} &= a_{j1} \cos \alpha + b_{j1} \sin \alpha \\ b_{j2} &= a_{j1} (-\sin \alpha) + b_{j1} \cos \alpha \end{aligned} \quad (26)$$

Doporučujeme čtenáři, aby před dalším čtením provedl naznačený výpočet pro všech 18 nových faktorových zátěží a aby se přesvědčil, že korelace, které můžeme z faktorové matice vypočítat, se rotací nezměnily.

Matematicky vzdělaný čtenář to ovšem neučiní, protože probírané vztahy jsou mu zřejmé. Uvědomí si, že jde o násobení matic. Násobili jsme původní faktorovou matici maticí, kterou můžeme zapsat takto:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Matice T je orthogonální, protože $\cos \alpha (-\sin \alpha) + \sin \alpha \cos \alpha = 0$. Označíme-li tuto matici P a nerotovanou matici A , pak všechny výpočty podle vzorců (26) jsou shrnuty v prostém násobení matic:

$$P = AT$$

Reprodukce původní korelační matice je možná z matice A podle vzorce $R = AA'$. je však možná také podle vzorce PP' , protože

$$PP' = AT(AT)' = ATT'A$$

a z orthogonality T plyne, že $TT' = I$ a tedy $PP' = AA' = R$.

Úhel alfa je možno zvolit libovolně a máme tedy nekonečné množství možných faktorových matic, které stejně dobře vyhovují dané korelační matici.

Uvedený příklad se týkal tzv. orthogonální rotace, kdy úhly mezi faktory zůstávají stále stejné - pravé. Avšak i při kosé rotaci platí, že v rotované faktorové matici a matici korelací mezi faktory jsou obsaženy všechny informace, potřebné ke zpětnému výpočtu korelační matice.

C) Transformační matice

Rotaci provádíme algebraicky pomocí transformační matice. Násobením nerotované faktorové matice transformační maticí dostáváme rotovanou faktorovou matici:

$$P = AT$$

Každý řádek transformační matice odpovídá jednomu nerotovanému faktoru, každý sloupec jednomu rotovanému faktoru. Každé číslo v této matici vyjadřuje souřadnici jednoho nového faktoru vzhledem k jednomu z původních, nerotovaných faktorů. Transformační matice je vždycky čtvercová, rotací faktorů ani nepřibývá, ani neubývá.

Příklad transformační matice je dán v tabulce 14.

Tabulka 14. Příklad transformační matice

		Rotované faktory			
		I	II	III	IV
Nerotované faktory	A	0,234	0,201	0,170	0,160
	B	-0,588	-0,376	0,499	0,434
	C	-0,714	0,737	-0,530	0,425
	D	0,301	-0,525	-0,665	0,778

Násobení touto maticí je algebraickým ekvivalentem rotace, jak jsme ji naznačovali graficky.

Vzhledem k tomu, že původní, nerotované faktory jsou orthogonální, musí být sloupcové vektory transformační matice normalizované, tj. součet čtverců jejich elementů musí být roven 1. Tyto elementy jsou rovny kosinům úhlů svíraným - v geometrickém vyjádření faktorového modelu - vždy vektorem nového faktoru a vektory původních, nerotovaných faktorů. Například v 1.sloupci jsou kosiny úhlů, které svírá první rotovaný faktor se všemi nerotovanými faktory.

D) Pojem jednoduché struktury

Vraťme se nyní k obr. 1, na kterém je znázorněna rotace faktorů. Tuto rotaci jsme provedli podle kritéria jednoduché struktury (simple structure), o které nyní pojednáme.

Již jednou jsme se setkali s principem maximální úspornosti, jednoduchosti. Bylo to v souvislosti s obecnou hypotézou, že nejsprávnější řešení je to, které počítá s nejmenším množstvím společných faktorů (viz obr. 53). V pojmu jednoduché struktury je znovu pointou úspornost: každý test má být sycen co nejmenším počtem faktorů a ve faktorové matici má být co nejvíce nulových zátěží (tj. zhruba nulových, obvykle považujeme za nulovou zátěž v rozmezí $\pm 0,1$).

Thurstonův ideál jednoduché struktury je poněkud složitější a myšlenkově bohatší, než jsme právě naznačili. Probereme podrobně 5 požadavků, které má ideální jednoduchá struktura podle Thurstona splňovat (1947,335).

1. Každý řádek faktorové matice by měl mít alespoň jednu nulu.
2. V každém sloupci faktorové matice by mělo být několik nul.
3. Každá dvojice sloupců ve faktorové matici by měla mít několik testů tak, aby některé z nich měly zátěž jen v jednom a jiné jen v druhém z nich.
4. Pro kteroukoli dvojici sloupců ve faktorové matici by velká část testů měla mít v obou sloupcích nulu.
5. Pro každý pár sloupců faktorové matice by mělo platit, že jen několik málo testů má nenulové zátěže v obou z nich.

Obr. 13 na str. 63 znázorňuje faktorovou matici, která splňuje všechny požadavky dokonalé jednoduché struktury podle Thurstona. Nenulové zátěže jsou označeny "x", nulové jsou pro přehlednost vynechány.

Když se s pomocí obr. 13 zamyslíme nad uvedenými zásadami, vidíme, že nejde o globální jednoduchost faktorové matice, nýbrž o to, aby byly faktory nulovými zátěžemi navzájem co nejjasněji odlišeny.

Thurstonovy zásady je obtížné převést do matematického jazyka a shrnout v jedinou zásadu tak, aby se mohlo přesně říci, které z možných řešení nejlépe vyhovuje požadavku jednoduché struktury. Přesto se o to jeho žáci pokusili a redukovali dokonalost jednoduché struktury na procento nul ve faktorové matici nebo na jiné jednoduché kritérium.

Faktorová analýza v našem podání je faktorovou analýzou komunalit, společné variance. Vstupuje do ní pouze to, co je testům společné, co se uplatňuje v korelacích. To musíme uvážit i z hlediska rotace do jednoduché struktury. Je-li komunalita určitého testu nízká, mají jeho zátěže celkově sklon být nižší než u testu s vysokou komunalitou. V řádku faktorové matice odpovídajícím danému testu se pak snadno vyskytnou zátěže blízké nule. Dojdeme tak v tomto řádku k jednoduché struktuře, která může být pouze zdánlivá,

protože není spojena s výraznou diferen-
ciací zátěží. Z tohoto důvodu je logické
před rotací do jednoduché struktury všechny
řádky faktorové matice normalizovat, tj.
dělit každou zátěž každého testu odmocninou
z příslušné komunality. Tím je každý test
"protažen" na jednotkovou délku v prostoru
společných faktorů. (Viz str. 80.)

Po dokončení rotace (dosažení jednoduché
struktury) je třeba se vrátit k původním
komunalitám, ke skutečné délce testových
vektorů, případně použít korektury vycháze-
jící z reliability (viz str. 86).

Cvičení

1. Dosaďte za "x" v obr. 13 jakékoli hodno-
ty (kladné i záporné) tak, aby komunalí-
ty byly v mezích 0,80 až 0,95. Načrtněte
grafy pro všechny dvojice faktorů.

E) Orthogonální jednoduchá struktura: Cvičení

Využijeme nyní toho, co už známe,
k praktickému provedení rotace podle princi-
pu jednoduché struktury.

Vyjdeme z nerotované faktorové matice
uvedené v tab. 15, str. 64.

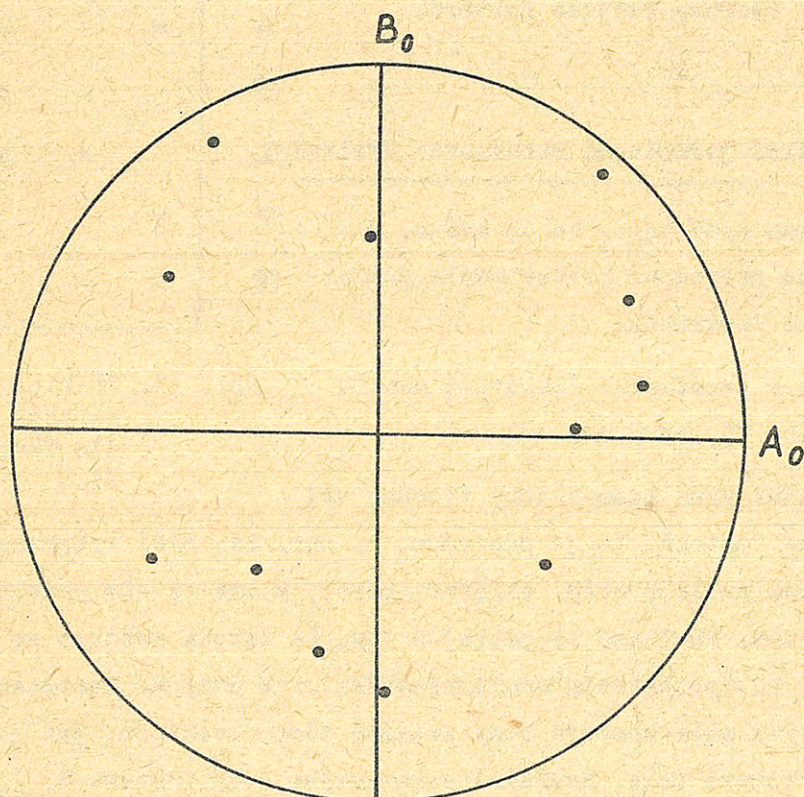
Znázorníme nyní geometricky všechny tři
možné dvojice faktorů. To je provedeno na obr. 14. Nyní vybereme graf, na
kterém bychom mohli provést takovou rotaci, která by nás přiblížila jedno-
duché struktuře. Shodneme se patrně v tom, že taková možnost se naskytá
v grafu 14c, kde pootočením souřadnicových os o úhel α dostaneme do pásma
zátěží blízkých nule koncové body zvláště těch vektorů, jež jsou nyní vle-
vo nahoře a vpravo dole. Souřadnice koncového bodu faktoru B_1 (jednoho z no-
vých, rotovaných faktorů) jsou $0,770 (\cos \alpha)$ a $0,638 (\sin \alpha)$. Souřadnice
faktoru C_1 jsou $-\sin \alpha$ a $\cos \alpha$. Těmito novými souřadnicemi budeme nyní
násobit staré souřadnice testů a násobky sčítat podle vzorce

	A	B	C	D	E
1	x		x	x	
2					x
3		x	x		x
4	x	x			
5			x	x	
6				x	
7				x	x
8	x				x
9		x			x
10	x			x	x
11			x		
12		x	x	x	
13		x		x	
14	x		x		
15			x		x
16		x	x		
17	x				
18	x	x		x	

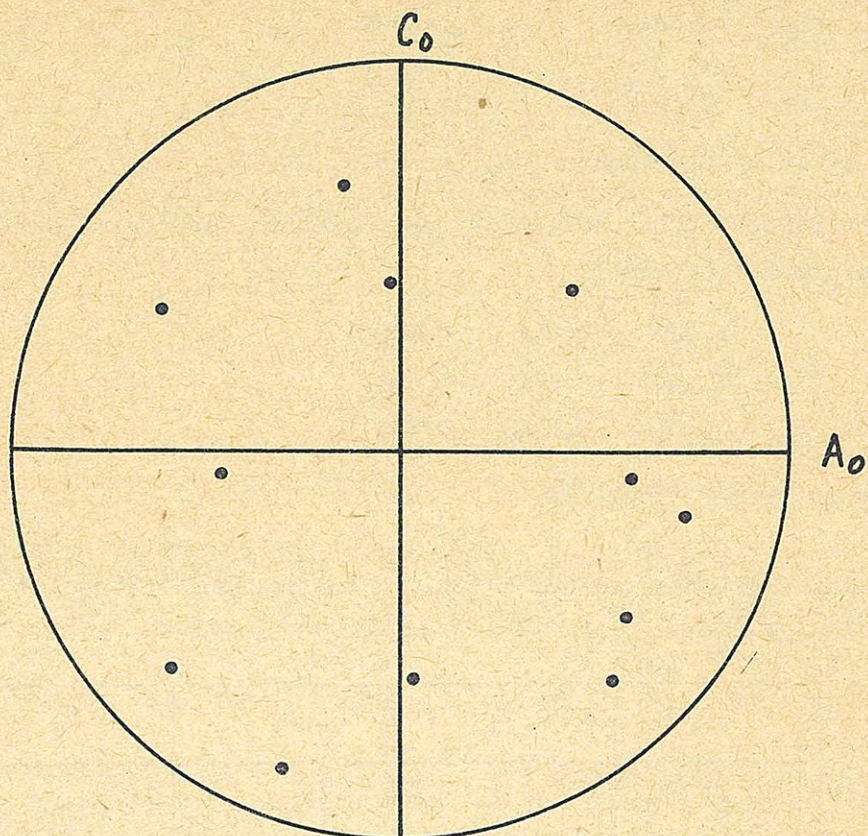
Obr. 13. Příklad dokonalé jed-
noduché struktury po-
dle Thurstonova poje-
tí.

Tabulka 15. Cvičná faktorová matice k vizuální orthogonální rotaci

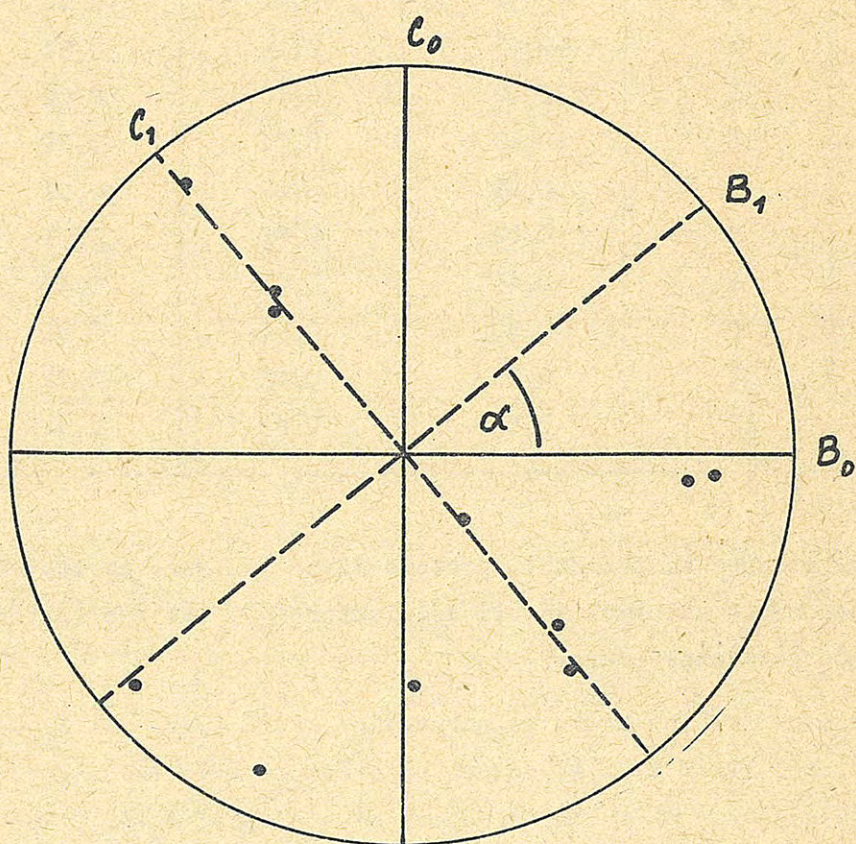
	A_0	B_0	C_0
1	0,54	0,01	-0,59
2	-0,15	-0,58	0,70
3	-0,32	-0,37	-0,81
4	-0,61	-0,34	0,38
5	-0,02	0,54	0,45
6	-0,58	0,43	-0,54
7	0,69	0,38	-0,43
8	0,02	-0,69	-0,58
9	0,45	-0,34	0,42
10	0,60	0,72	-0,06
11	0,73	0,15	-0,16
12	-0,46	0,80	-0,04



Obr. 14a.



Obr. 14b.



Obr. 14c.

Obr. 14. Grafické znázornění dvojice faktorů k orthogonální rotaci (viz tab. 15).

$$b_{j2} = b_{j1} \cos \alpha + c_{j1} \sin \alpha$$

$$c_{c2} = b_{j1} (-\sin \alpha) + c_{j1} \cos \alpha$$

(což je pouze úprava vzorce (26), viz str. 60).

V termínech maticového počtu jde o násobení faktorové matice z tabulky 15 transformační maticí T:

$$T = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,770 & -0,638 \\ 0,000 & 0,638 & 0,770 \end{pmatrix}$$

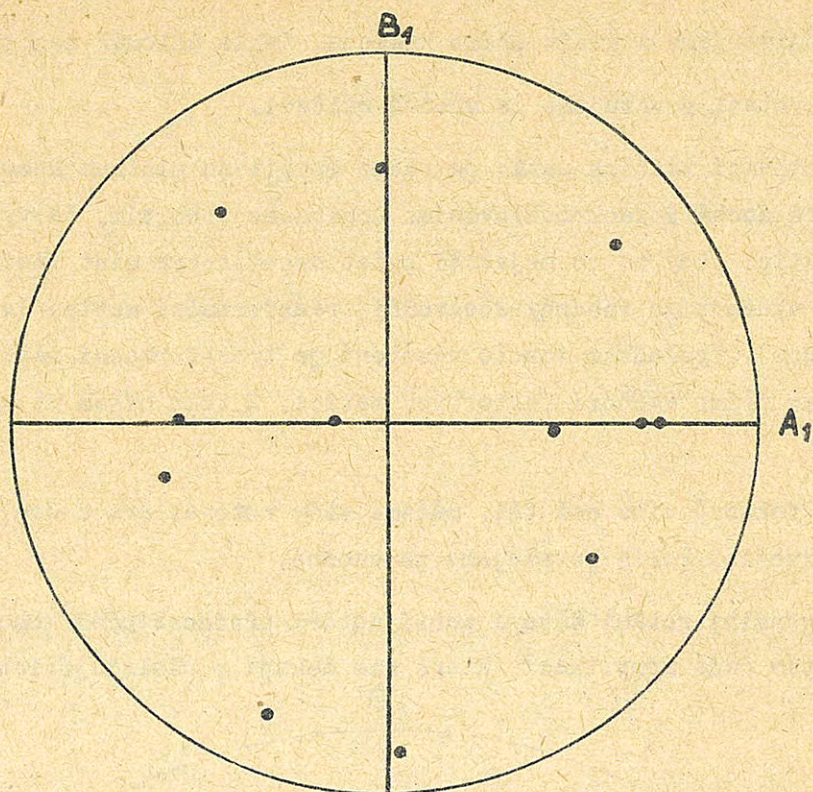
Výsledek je uveden v tab. 16.

Tabulka 16. Faktorová matice z tab. 15 po orthogonální rotaci faktorů B_0 a C_0

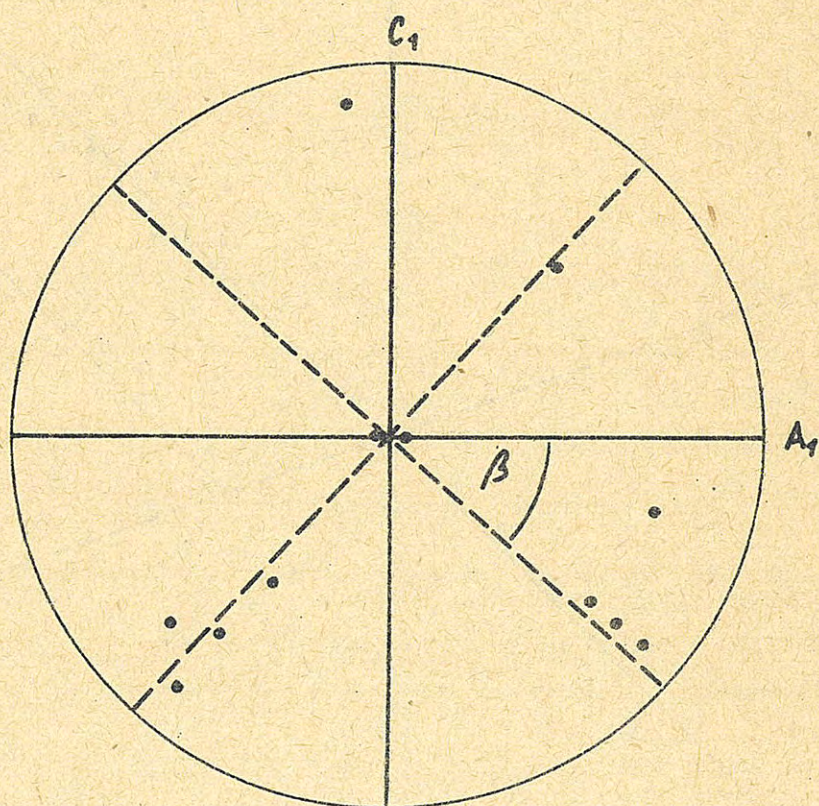
	A_1	B_1	C_1
1	0,54	-0,37	-0,46
2	-0,15	0,00	0,91
3	-0,32	-0,80	-0,40
4	-0,61	0,19	0,51
5	-0,02	0,70	0,00
6	-0,58	0,01	-0,69
7	0,69	0,02	-0,57
8	0,02	-0,90	0,01
9	0,45	0,01	0,47
10	0,60	0,52	-0,51
11	0,73	0,01	-0,22
12	-0,46	0,59	-0,54

První sloupec se nezměnil, protože faktor A_0 jsme nerotovali. Faktor B_1 má vyšší procento nulových zátěží než faktor B_0 , zatímco faktor C_1 neznámá proti C_0 podstatný pokrok.

Přípravou dalšího kroku je narysování grafů A_1-B_1 a A_1-C_1 (graf B_1-C_1 máme už v obr. 14c a k další rotaci ho ovšem nepoužijeme). První dva nové grafy jsou na obr. 15a a 15b. K rotaci se hodí graf A_1-C_1 , kde se správná rotace přímo vnucuje. Rotujeme tentokrát o úhel β (ze cvičných důvodů volíme záporný úhel, abychom si uvědomili, že na směru nezáleží). Jeho kosinus



Obr. 15a.



Obr. 15b.

Obr. 15. Grafické znázornění dvojice faktorů po prvním kroku vizuální orthogonální rotace. V grafu 15b naznačena další rotace.

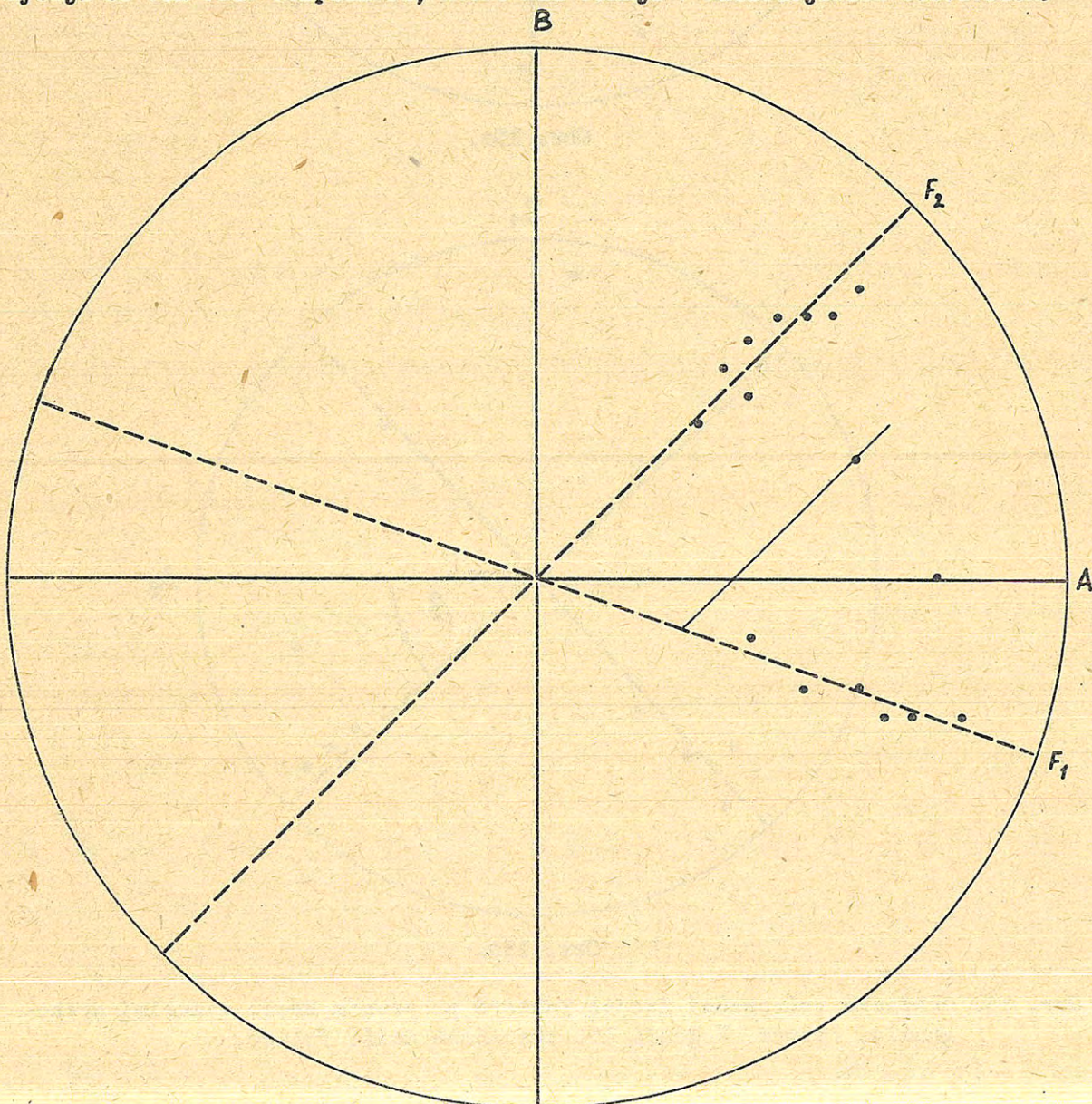
je 0,38. (Zjišťujeme z grafu přímo kosinus, takže úhloměr nepotřebujeme.)

Další rotaci považujeme za vhodné cvičení.

Při rotování větších matic je radno snížit na minimum kumulativní chybu, ke které dochází zaokrouhlováním. Dosáhneme toho tím, že vypočítáme transformační matici vždy na co největší počet desetinných míst (asi 6) a vždycky mezi sebou vynásobíme všechny dosavadní transformační matice (v pořadí jak jdou za sebou). Výsledkem tohoto násobení je transformační matice, kterou pak násobíme přímo výchozí faktorovou maticí. K tomu ovšem už potřebujeme počítač.

Je-li faktorů více než tři, můžeme vždy rotovat dva a dva, tj. tolik nezávislých dvojic, kolik považujeme za vhodné.

Orthogonální rotaci dávají mnozí autoři přednost před kosou rotací. Vy-
hýbají se tím řadě komplikací, které nás čekají v následujících odstavcích.



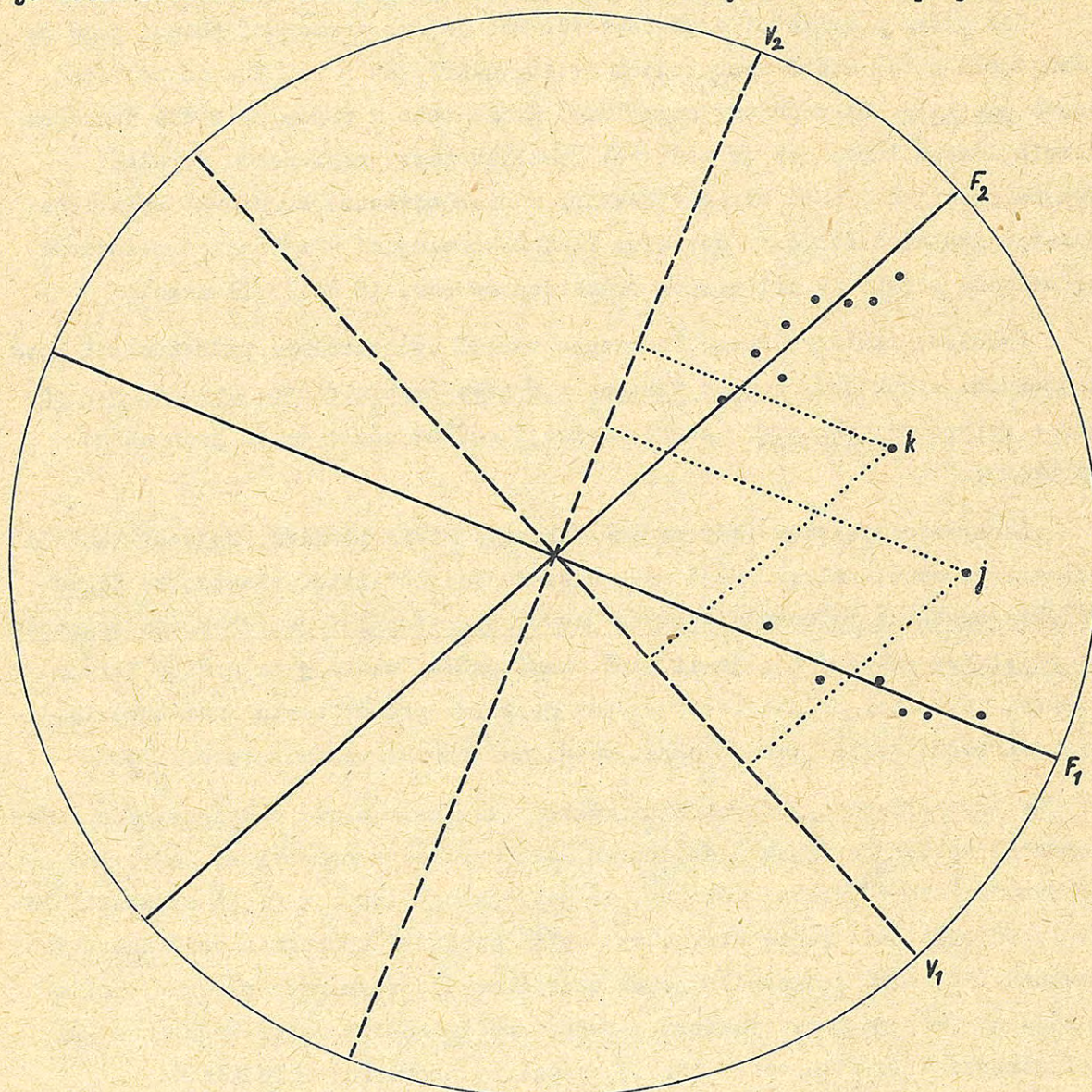
Obr. 16. Geometrické vyjádření matice o dvou faktorech, kde se nabízí kosá rotace. Nerotované faktory: A, B ; rotované faktory: F_1 , F_2 .

F) Faktory a referenční vektory

Zdůraznění principu jednoduché struktury vedlo Thurstona k zavedení referenčních vektorů. Oč jde, ukážeme opět na příkladě. Vyjdeme z nerotované matice o dvou faktorech (A,B), která je geometricky vyjádřena na obr. 16.

Na první pohled vidíme, že všechny testy korelují kladně (mohlo by jít o testy rozumových schopností, kde je to pravidlem) a zdá se nám, že by i faktory měly korelovat kladně, že by měly svírat ostrý úhel (jak je vyznačeno čárkovaně); zlepšilo by to také jednoduchou strukturu. Tím jsme dospěli k myšlence kosé (oblique), neorthogonální rotace.

Kosá rotace znamená vlastně zavedení kosoúhlých souřadnicových os. Souřadnice bodu (v našem případě koncového bodu testového vektoru) je totožná s kosým průmětem na příslušnou osu, resp. na příslušný faktor. Tento průmět je veden rovnoběžně se všemi ostatními souřadnicovými osami. V případě dvou



Obr. 17. Dvojice faktorů F_1 , F_2 a odpovídajících referenčních vektorů V_1 , V_2 .

faktorů promítáme, jak je naznačeno na obr. 17, rovnoběžně s faktorem F_1 na faktor F_2 a naopak.

Thurstone poznal, že je nutno zavést kosou rotaci, kosou jednoduchou strukturu (*oblique simple structure*), ale z různých logicky nepodstatných důvodů, k jejichž výkladu nám chybí prostředky, potřeboval setrvat při kolmých průmětech testů. Proto uvedl do faktorové analýzy pojem referenčního vektoru a spolu s ním pojem nadroviny.

Při pohledu na obr. 16 a 17 můžeme uvažovat takto: Chceme-li zlepšit jednoduchou strukturu při orthogonálních průmětech, musíme vést jeden faktor tak, aby kolmé průměty skupiny testů poblíž vodorovné osy na tento faktor byly nulové nebo přibližně nulové. Druhý faktor musíme vést tak, aby na něm byly blízké nule kolmé průměty testů, jejichž body jsou poblíž vertikální osy. Tyto faktory jsou zakresleny na obr. 17 a označeny V_1 a V_2 .

Jde ovšem o zvláštní druh faktorů. Při jejich stanovení rotací jsme se nezajímali o to, které testy budou sytit, nýbrž jen o to, aby co nejvíce testů nesytily. Jsou určeny negativně. Kromě toho v našem příkladě navzájem korelují negativně, což je podivné: jestliže testy mezi sebou korelují vesměs pozitivně, proč by měly faktory z nich odvozené korelovat negativně? Ostatně skutečné faktory, navzájem kladně korelující a splňující požadavek jednoduché struktury při kosých průmětech na obr. 16 a 17 již máme.

Vskutku, faktory, které Thurstone zavedl kvůli kolmým průmětům při kosé jednoduché struktuře, nejsou faktory v pravém smyslu slova. Jsou to jen pomocné referenční vektory, které umožňují rotaci podle zásad jednoduché struktury.

Referenční vektory tedy nejsou faktory, které hledáme. Nejsou vlastním cílem faktorové analýzy. Mají však následující důležitou vlastnost: Kolmé průměty testů na referenční vektor jsou proporcionální jejich kosým průmětům na příslušný faktor, tj. je-li např. kosý průmět testu j na určitý faktor dvakrát větší než průmět testu k , pak je kolmý průmět testu j na odpovídající referenční vektor také dvakrát větší než průmět testu k (obr. 17).

V souvislosti s referenčními vektory se často mluví o nadrovinách. Referenční vektor je vlastně definován jako kolmice k nadrovině. Nadrovina se ve dvourozměrném prostoru na obr. 16 jeví jako přímka, v jejíž blízkosti leží (v případě jednoduché struktury) větší množství koncových bodů testových vektorů. Při třech rozměrech je už nadrovina dvojrozměrnou plochou, při m rozměrech (kdy je počet faktorů a tedy i referenčních vektorů roven m) má $m-1$ dimenzí a je-li m větší než 3, vymyká se prostorové představě.

Je nutno zapamatovat si tyto vztahy: Každý referenční vektor je kolmý ke všem faktorům kromě jednoho (tj. toho, s nímž má proporcionální zátěže). V nadrovině druhého referenčního vektoru tedy leží všechny faktory kromě jednoho. Každý faktor leží v průsečíku nadrovin všech referenčních vektorů kromě jednoho.

V případě dvou faktorů je vztah mezi faktory a referenčními vektory zcela přehledný. Je např. zřejmé, že korelují-li dva faktory kladně, korelují referenční vektory stejně vysoko, ale záporně (a naopak). Při větším počtu faktorů se však tato přehlednost ztrácí. Narýsujeme-li dvojici referenčních vektorů zvolenou z většího množství referenčních vektorů (dvojdímenzionální výsek z m-dímenzionálního "ježka" /viz str. 37 /), nelze do tohoto obrazu obvykle zakreslit faktory tak, jako je tomu na obr. 17.

V případě ortogonálních faktorů splývá referenční vektor s příslušným faktorem. Čím menší kosost (tj. čím menší korelace mezi faktory), tím jsou si faktor s příslušným referenčním vektorem bližší.

Jak jsme řekli, transformační matici, jež vede od nerotovaných faktorů k rotovaným (od matice A k matici P), značíme obvykle T. Je však třeba poznamenat, že to platí pouze v případě ortogonální rotace, kdy úhly mezi faktory zůstávají pravé. (Při kosé rotaci dává matice T kolmé průměty na kosé faktory, tzv. faktorovou strukturu S, které užíváme jen k některým speciálním účelům). Při kosé rotaci pracujeme obvykle s referenčními vektory. Jejich matici budeme značit V a transformační matici, která k nim vede, Λ (lambda). Matici korelací mezi faktory značíme ϕ , matici korelací mezi referenčními vektory ψ .

Potřebujeme vzorce

$$\begin{aligned}\phi &= T'T \\ \psi &= \Lambda'\Lambda\end{aligned}\tag{27}$$

Při kosé rotaci do jednoduché struktury pracujeme s referenčními vektory a o faktory se "nezajímáme", kontrolujeme pouze podle potřeby úhly mezi faktory. Teprve když je rotace ukončena, vypočítáme faktorové zátěže (kosé průměty testů na faktory). Používáme k tomu následující rovnice:

$$P = VD^{-1},$$

kde D je diagonální matice, jejíž elementy jsou reciproké hodnoty odmocnin diagonálních elementů matice ψ^{-1} . Matice D umožňuje také výpočet

$$\phi = D\psi^{-1}D.$$

CVIČENÍ

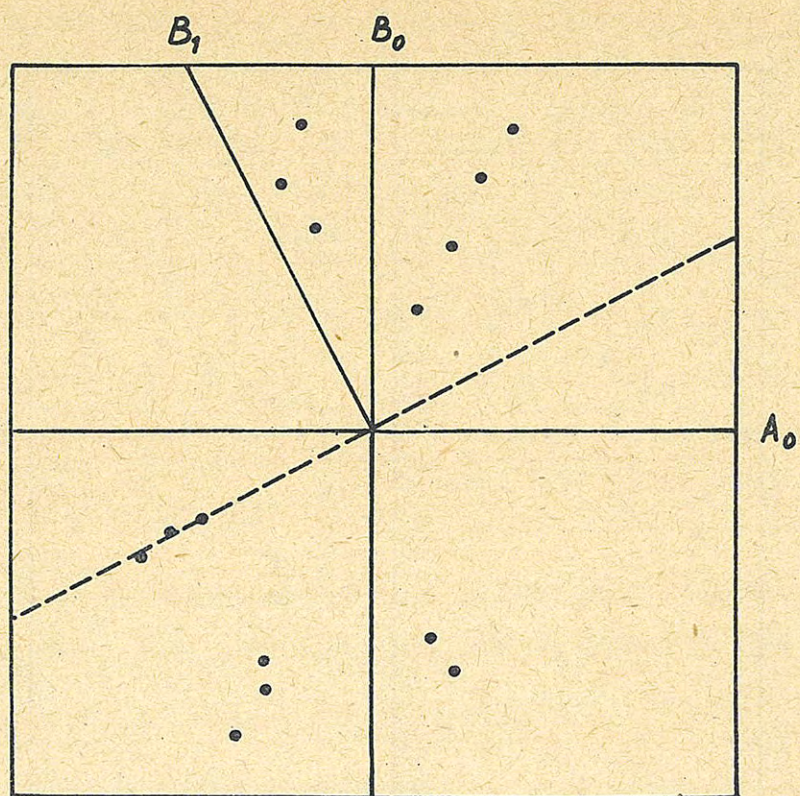
1. Sestavte (odměřením z obr. 16 nebo 17) orthogonální faktorovou matici.
2. Napište transformační matici Λ odpovídající referenčním vektorům na obr. 17.
3. Vypočítejte matice Ψ a Φ .
4. Vypočítejte faktorovou matici P s faktory F_1 a F_2 z obr. 16 a 17.
5. Nakreslete z paměti obr. 17.
6. Je možný případ, kdy dva testy, korelující navzájem záporně, mají v určitém faktoru současně kladné zátěže? Je to možné v případě referenčních vektorů?
7. Jaký je vztah mezi faktorem a příslušným vektorem v případě orthogonality?

G) Rotoplot

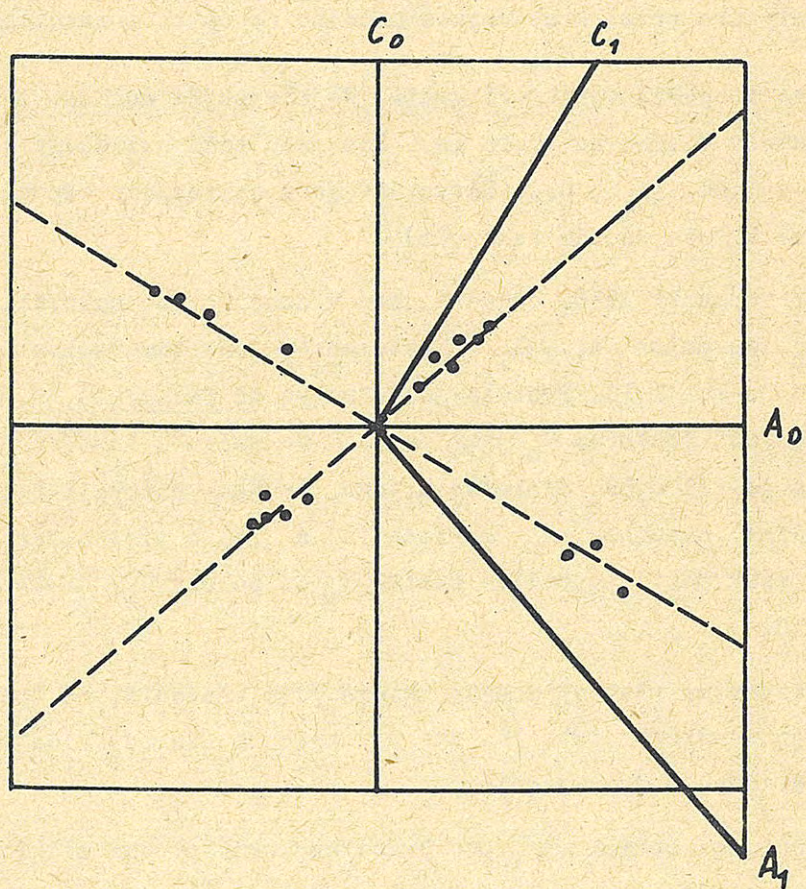
Probereme nyní praktickou metodu šikmé rotace, která se hodí zejména pro dosažení jednoduché struktury. Začneme příkladem. Máme rotovat orthogonální faktorovou matici A , uvedenou v tab. 17. Narýsujeme tři grafy pro všechny tři možné dvojice faktorů (viz obr. 18).

Tabulka 17. Orthogonální faktorová matice A pro cvičnou rotaci metodou rotoplot

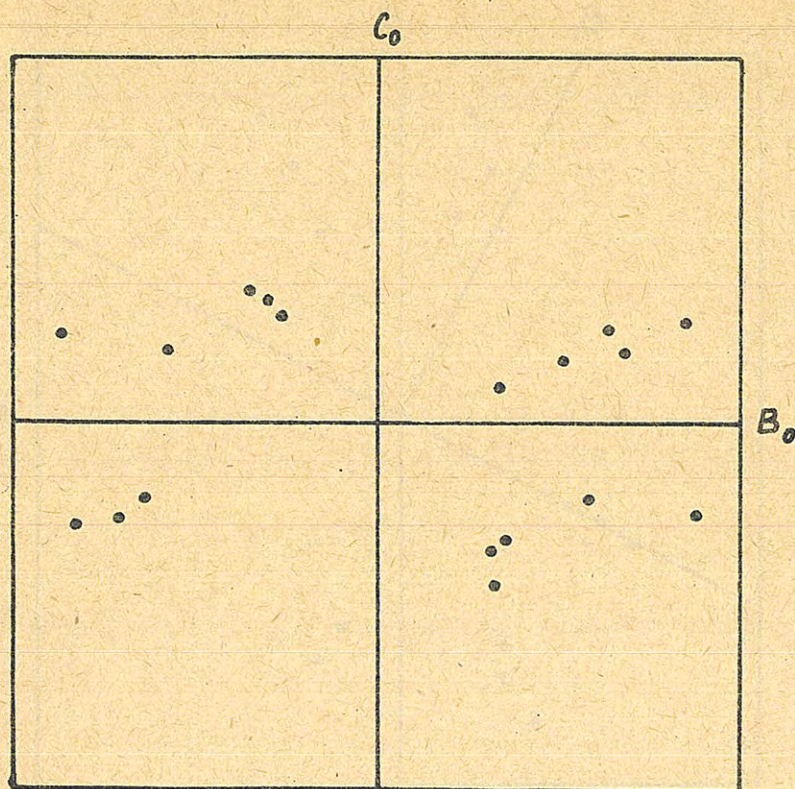
A_o	B_o	C_o
-24	68	20
69	38	-43
22	51	18
-17	56	-20
23	-85	24
-54	-29	34
-29	-71	-26
17	-56	20
-23	85	-24
29	71	26
-62	-34	38
-46	-25	29
54	29	-34
12	34	10
37	83	27
-30	-63	-19
-37	-83	-27
62	34	-38



Obr. 18a.



Obr. 18b.



Obr. 18c.

Obr. 18. Grafy pro první krok rotace metodou rotoplot s naznačeným postupem.

Začínáme inspekci všech tří grafů. Nejzřejmější možnost zlepšit jednoduchou strukturu vidíme na grafu (b), kde jsou také naznačeny referenční vektory, které volíme. (A_1 , C_1). Čárkovaně jsou nakresleny odpovídající nadroviny (kolmice k referenčním vektorům).

Změříme tangenty úhlů, o které jsme v dané rovině rotovali původní faktory A_0 , C_0 do poloh A_1 , C_1 . Faktorem A_0 jsme tím "pohnuli" o úhel, jehož tangenta je asi 1,18. Protože jde o pohyb od faktoru C_0 , bereme tuto tangentu záporně. Faktorem C_0 jsme pohnuli ve směru k faktoru A_0 o úhel, jehož tangenta je asi 0,58. Vzhledem k tomu, že jsme rotovali faktory A_0 a C_0 dosti radikálně, nebudeme už v grafech (a) a (b) s těmito faktory hýbat. V grafu (a) však ještě pootočíme faktor B_0 do polohy B_1 o úhel, jehož tangenta je 0,50.

Nyní sestavíme všechny pohyby, které jsme provedli, do "posuvné matice" S_1 , která je uvedena v tab. 18. Starým faktorům zde odpovídají řádky, novým sloupce. V diagonále jsou jedničky.

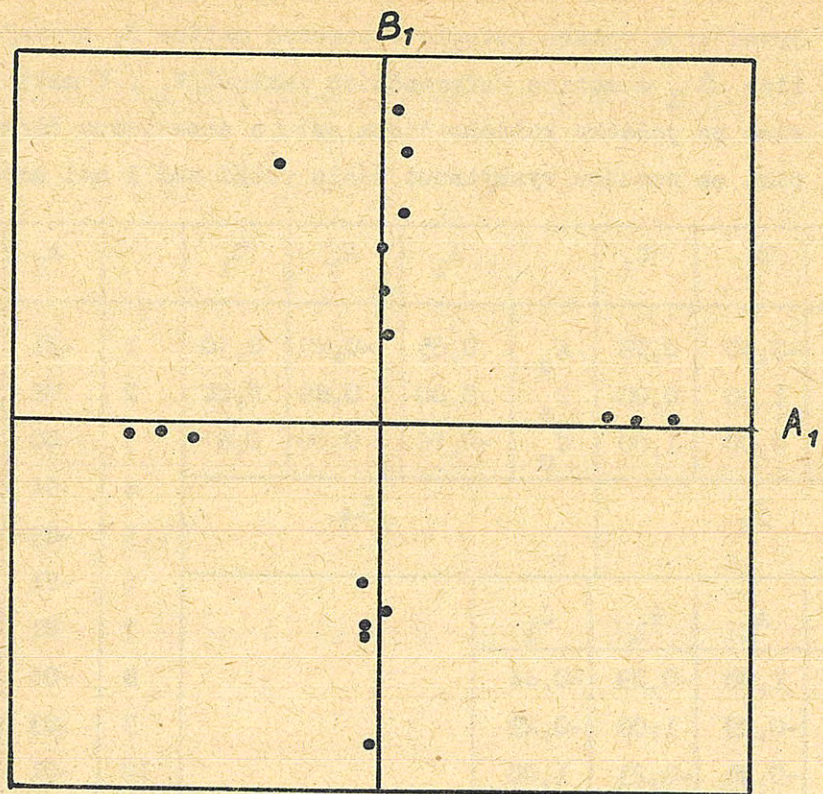
Transformační matici Λ_1 pro první krok rotoplotem získáme tak, že normalizujeme sloupce posuvné matice S_1 . Maticí Λ_1 pak násobíme nerotovanou matici A , čímž dostaneme matici referenčních vektorů V_1 (viz tab. 18).

Tabulka 18. První krok rotace rotoplot: pomocná matice S_1 , transformační matice Λ_1 a matice referenčních vektorů V_1 . V matici V_1 vynecháme na počátku každého čísla nulu a desetinnou čárku. V této matici se nemohou vyskytnout čísla větší než 1 ani menší než -1.

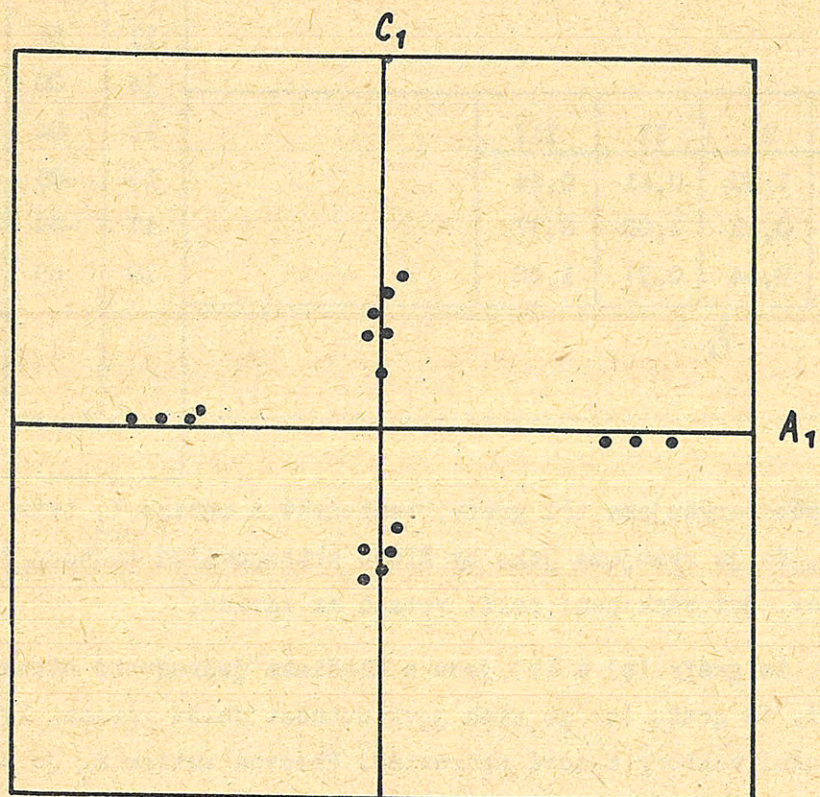
	A_1	B_1	C_1		A_1	B_1	C_1		A_1	B_1	C_1
A_0	1,00	-0,50	0,58	A_0	0,65	-0,45	0,50	1	-31	71	05
B_0	0,00	1,00	0,00	B_0	0,00	0,89	0,00	2	78	03	-03
C_0	-1,18	0,00	1,00	C_0	-0,76	0,00	0,87	3	00	36	27
S_1				Λ_1				4	04	58	-26
		A_1	B_1	C_1				5	-03	-86	32
	A_1	1,00	-0,29	-0,44				6	-61	-02	03
	B_1	-0,29	1,00	-0,23				7	01	-50	-37
	C_1	-0,34	-0,23	1,00				8	-04	-58	26
ψ_1								9	03	86	-32
		I	II	III				10	-01	50	37
	I	1,00	0,41	0,44				11	-69	-02	02
	II	0,41	1,00	0,37				12	-52	-02	02
	III	0,44	0,37	1,00				13	61	02	-03
ϕ_1								14	00	25	15
								15	04	74	42
								16	-05	-43	-32
								17	-04	-57	-42
								18	69	02	-02
								V_1			

Nyní opět narýsujeme tři grafy, tentokrát z matice V_1 (viz obr. 19 a), b), c). Tím, že je rýsujeme jako by šlo o orthogonální vektory, vzniká určitá nepřesnost, jež však není další rotací na závadu.

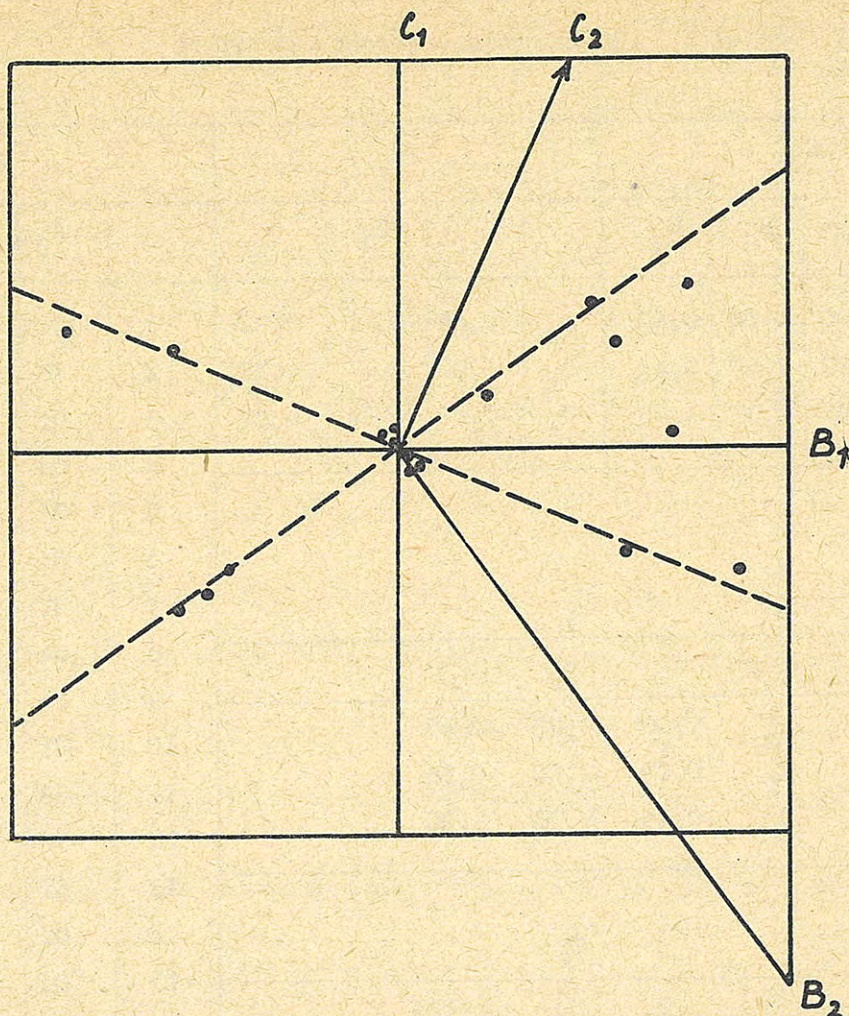
Vidíme, že grafy (a) a (b) jsou z hlediska jednoduché struktury prakticky optimální. Na grafu (c) se však jeví nutnost další rotace. Vyznačíme zde nové referenční vektory a nové nadroviny. Posuvná matice S_2 je uvedena v tabulce 19.



Obr. 19a.



Obr. 19b.



Obr. 19. Grafy dvojice referenčních vektorů po prvním kroku rotace metodou rotoplot (další postup naznačen v grafu 19c).

Výpočet Λ_2 probíhá tak, že provedeme násobení $S_1 \times S_2$ a výsledek normalizujeme po sloupcích. Násobení $A \times \Lambda_2$ dává matici referenčních vektorů V_2 .

Posuvné matice, transformační matice a matice korelací mezi referenčními vektory (případně mezi faktory) určujeme jen na dvě desetinná místa. Chyba ze zaokrouhlování se nekumuluje. Chceme-li, můžeme poslední Λ , V , P , ψ a ϕ vypočítat na větší počet desetinných míst.

Matice referenčních vektorů V_2 má velmi uspokojivou jednoduchou strukturu a můžeme ji považovat za konečnou. V praxi ovšem dva kroky zpravidla nestačí. V Cattellově laboratoři se provádí často (s většími maticemi) až 15 nebo i více kroků.

Všechny výpočty včetně grafů ("plots" odtud název "rotoplot") je možno provádět na počítači. Stačí sestavit pro každý krok novou posuvnou matici.

Tabulka 19. Výsledek 2. kroku rotace metodou rotoplot

S_2				A_2				V_2			
	A_2	B_2	C_2		A_2	B_2	C_2		A_2	B_2	C_2
A_1	1,00	0,00	0,00	A_0	0,65	-0,61	0,32	1	-31	34	35
B_1	0,00	1,00	0,42	B_0	0,00	0,47	0,37	2	78	03	01
C_1	0,00	-1,37	1,00	C_0	-0,67	-0,64	0,87	3	01	-01	42
								4	04	49	-02
								5	-03	-69	-03
								6	-61	-02	02
ψ_2								7	01	01	-58
				A_2	B_2	C_2		8	-04	-49	02
				A_2	1,00	0,09	-0,45	9	03	69	03
				B_2	0,09	1,00	-0,58	10	-01	-01	58
				C_2	-0,45	-0,58	1,00	11	-69	-02	01
								12	-52	-02	-02
								13	61	02	-02
ϕ_2								14	00	02	25
				I	II	III		15	04	-01	66
				I	1,00	0,23	0,49	16	-05	01	-49
				II	0,23	1,00	0,61	17	-04	01	-66
				III	0,49	0,61	1,00	18	69	02	-01

Existuje program pro MINSK 22, který je ovšem v případě větších matic (více než 5 faktorů) časově dosti náročný.

Cvičení

1. Narysujte grafy V_1 tak, aby úhly souřadnicových os odpovídaly matici ψ_1 .
2. Pokuste se začít rotací matice A s použitím jiné posuvné matice než S_1 .

H) Automatická rotace do jednoduché struktury

Člověk, který provádí rotaci "naslepo", tj. aniž by věděl, co znamená který testový vektor v jeho grafech, se zdá být nahraditelný samočinným počítačem. Jde jen o to, zadat počítači úkol zcela jednoznačně.

1. Analytické rotace

Subjektivní grafické rotační procedury bývaly často napadány - říkalo se (a říká), že jde spíše o umění než o vědu. Je třeba uznat, že je to námitka do jisté míry oprávněná. Princip jednoduché struktury, o který se při takových postupech opíráme, je skutečně dosti nematematicky a vágně formulován a není zaručeno, že se při řešení téhož problému jednotliví pracovníci shodnou.

Snaha odstranit tuto subjektivitu vedla k řadě návrhů objektivizace rotace faktorů. Většinou jde o pokus nějak matematizovat Thurstonův požadavek jednoduché struktury, požadavek, aby každý sloupec faktorové matice obsahoval co nejvíc nul a aby faktory byly co nejjasněji rozlišeny.

Pokusíme se stručně uvést několik nejčastěji užívaných analytických kritérií rotace. Jejich vývoj není ještě zcela ukončen - objevují se nové návrhy a ani v názorech na kvalitu jednotlivých metod (již užívaných) se faktoroví analytici neshodují. Náš přehled proto nebude úplný a nepokoušíme se ani o kritické zhodnocení jednotlivých technik.

A) Ortogonální faktory

Nejběžněji - a úspěšně - užívanou technikou ortogonální analytické rotace je tzv. metoda VARIMAX¹⁾, navržená H.F. Kaiserem. Vychází z této úvahy: faktor bude nejnázorněji interpretovatelný, když jeho zátěže budou blízké nule a jedničce (a jenom výjimečně budou nabývat středních hodnot). Kaiser proto definuje "jednoduchost" faktoru jako rozptyl čtverců jeho zátěží

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (b_{jp}^2)^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^n b_{jp}^2 \right)^2,$$

který je největší při žádoucí distribuci tvaru U.

Kritériem metody VARIMAX je součet těchto rozptylů pro všech m faktorů:

1) Užívá se často i jako předběžný krok pro kosou rotaci, jejíž náročnější výpočet se tím zkrátí.

$$V = \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^n (b_{jp}^2)^2 - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^m \left(\sum_{j=1}^n b_{jp}^2 \right)^2,$$

který má být maximalizován (odtud také název metody).

Běžně se užívá - dokonce častěji než původní - ještě jedna verze metody VARIMAX, která se snaží odstranit vliv nestejné délky testových vektorů. Všechny proměnné jsou (dělením odmocninou z komunality) "protaženy" na jednotkovou délku, takže se podílejí na určení polohy rotovaných faktorů stejnou měrou. Je to i logičtější - proměnné s nízkou komunalitou nemohou mít zátěže blízké jedné a narušují tak snahu dosáhnout co největšího počtu nulových a jedničky blízkých zátěží.

V praxi jsou rotovány vždy dva faktory. Nové zátěže jsou běžným způsobem funkčně spojeny se starými (ortogonální transformací)

$$\begin{bmatrix} \frac{b_{j1}}{h_j} & \frac{b_{j2}}{h_j} \\ h_j & h_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{j1}}{h_j} & \frac{a_{j2}}{h_j} \\ h_j & h_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

a pak se určuje úhel φ tak, aby byl maximalizován součet variancí čtverců nových faktorových zátěží. Po provedení rotace o úhel φ rotujeme podobně první (nový) a třetí faktor, první a čtvrtý atd. Po dokončení tohoto cyklu probereme znovu všechny dvojice faktorů a cyklus $\binom{n}{2}$ individuálních rotací opakujeme tak dlouho, až se poloha faktorů ustálí.

Nakonec vrátíme vektorům proměnných původní délku (násobením h_j) a rotace VARIMAX je hotova.

B) Kosé faktory

Metoda OBLIMAX

vychází z úvahy, že směr skórování testu je z hlediska jednoduché struktury irelevantní. Každou proměnnou proto jakoby uvažuje dvakrát (jednou s původním a jednou s opačným skórováním). Distribuce faktorových zátěží takové "zdvojené" proměnné je pochopitelně přesně symetrická a má průměr nula. Jako kritérium jednoduché struktury je pak možno použít špičatost této distribuce a její maximalizaci. Při průměru nula jde o relativně jednoduchý výraz:

$$K = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^m s_{jp}^4 / \left(\sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^m s_{jp}^2 \right)^2.$$

Při rotaci metodou OBLIMAX se tedy snažíme nalézt takové řešení (takovou transformaci), aby výsledná matice faktorové struktury splňovala kritérium $K = \max$.

Metody OBLIMIN

Základní myšlenkou této skupiny kosých rotací je minimalizace kovariancí čtverců prvků ve sloupcích matice faktorové struktury (COVARIMIN). Čím různější se od řádku k řádku "mění" prvky vždy dvou sloupců matice faktorové struktury, tím více se zřejmě bude výsledné řešení blížit jednoduché struktuře. Při stejné úpravě délky testových vektorů, o jaké jsme se zmínili u metody VARIMAX, jde tedy o výraz

$$\sum_{p < q=1}^m \left[n \sum_{j=1}^n \frac{s_{jp}^2}{h_j^2} \cdot \frac{s_{jq}^2}{h_j^2} - \sum_{j=1}^n \frac{s_{jp}^2}{h_j^2} \sum_{j=1}^n \frac{s_{jq}^2}{h_j^2} \right],$$

který má být minimalizován.

Empiricky se zjistilo, že tato metoda většinou vede k příliš ortogonálním faktorům. Z dalšího návrhu, označeného původně jako KVARTIMIN, se pak zrodila celá třída kritérií, označovaných nyní souhrnně jako OBLIMIN.

Jejich základem je minimalizace výrazu

$$B^{\mathcal{F}} = \sum_{p < q=1}^m \left(n \sum_{j=1}^n s_{jp}^2 s_{jq}^2 - \mathcal{F} \sum_{j=1}^n s_{jp}^2 \sum_{j=1}^n s_{jq}^2 \right)$$

nebo

$$B = \sum_{p < q} \left(n \sum_j \frac{s_{jp}^2}{h_j^2} \frac{s_{jq}^2}{h_j^2} - \mathcal{F} \sum_j \frac{s_{jp}^2}{h_j^2} \sum_j \frac{s_{jq}^2}{h_j^2} \right),$$

kde $\mathcal{F}$ je volitelný parametr.

Pro $\mathcal{F} = 1$ jde o kritérium COVARIMIN, případ, kdy $\mathcal{F} = 0$, bývá označován jako KVARTIMIN, případ $\mathcal{F} = 0,5$ jako BIKVARTIMIN.

Zdá se, že s užíváním těchto analytických metod není ještě dost zkušeností. Ač se kromě uvedených metod objevilo ještě několik dalších návrhů a je vcelku jasné, že volba mezi nimi závisí na charakteru dat, pravidla pro výběr nejsou popsána. Zdá se (Harman), že relativně nejlepší výsledky byly dosud dosaženy s metodou BIKVARTIMIN a s příbuzným kritériem BINORMAMIN, které však nepatří do třídy řešení OBLIMIN.

2. Maxplane

Hledání jednoduché struktury, jak je známe z metody rotaplot, se z automatických postupů nejvíce přibližuje Maxplane. Při této metodě počítač hledá takovou polohu faktorů (zpravidla referenčních vektorů), při které je maximální procento zátěží přibližně nulových (v mezích $\pm 0,1$), přičemž velikost

ostatních zátěží nehraje žádnou roli. Naprogramuje se také minimální úhel, kterého se může mezi referenčními vektory dosáhnout (maximální korelace mezi referenčními vektory).

J) Rotace podle hypotézy

Řekli jsme, že rotace do jednoduché struktury je vlastně sledováním velmi obecné hypotézy, že totiž právě jednoduchá struktura povede ke smysluplným, dobře interpretovatelným, a nad můžeme říci "skutečným" či "pravdivým" faktorům.

Princip jednoduché struktury se osvědčil jak v Thurstonově laboratoři, tak i v práci jeho žáků a pokračovatelů po celém světě. Konáme-li výzkum v oblasti, o níž je známo velmi málo, bývá to jediná použitelná metoda rotace. Přesto však hledáme v určitých případech jiné cesty, a to zvláště tehdy, můžeme-li při rotaci uplatnit určité hypotézy o tom, jaký je faktorový obraz dané oblasti.

Ve skromné míře se používá hypotéz při rotaci běžně, a to tak, že při metodě rotoplot nebo jiné vizuální rotaci nahlížíme do seznamu testů a identifikujeme jednotlivé body (koncové body testových vektorů) ve svých grafech. Můžeme předběžně interpretovat faktory a zbavovat se rotací těch zátěží, které naši interpretaci ruší či zvyšovat ty, které ji podporují. Tento heuristický postup je do jisté míry subjektivní, ale ne víc než jakékoli hledání vhodného matematicko-statistického postupu pro data, která již známe.

Nyní se budeme zabývat systematickým uplatněním hypotéz při rotaci.

1. Metoda pokusných vektorů

Metoda pokusných vektorů záleží v tom, že volíme některé (nebo všechny) faktory tak, aby procházely (byly kolineární s) určitými testy. Pak je interpretace faktorů ihned jasná: faktor je to, co měří test, s nímž je kolineární (přesněji: to, co působí korelace daného testu, tj. jeho komunalita). Mají-li vybrané testy dostatečně vysoké komunality a korelují-li zároveň navzájem jen málo, má tento postup naději na úspěch.

Technika metody pokusných vektorů je jednoduchá: Nejprve normalizujeme ten řádek nerotované faktorové matice, který odpovídá vybranému testu. Výsledek zapíšeme do kteréhokoli sloupce transformační matice. Tak můžeme transformační matici složit celou z pokusných vektorů.

Chceme-li rotovat kolineárně s vybranými testy jen některé faktory,

vyjdeme z "transformační matice", která má v diagonále jedničky a mimo diagonálu nuly. Násobení touto maticí (nazývá se "identická") by nevedlo k žádné změně nerotované faktorové matice. Nyní však nahradíme normalizovanými řádky vybraných testů některé sloupce transformační matice. Sloupce, ve kterých zůstává jednička a nuly, ponechávají při násobení odpovídající sloupce nerotované faktorové matice beze změny. - Normalizované řádky testů umísťujeme tak, abychom původní jedničku v identické transformační matici nahradili co nejvyšším číslem. Je-li např. normalizovaný řádek 0,4, 0,2, -0,8, 0,4, nahradíme jím třetí sloupec transformační matice, jež pak vypadá jak znázorněno v tab. 20:

Tabulka 20. Příklad transformační matice s pokusným vektorem

1,0	0,0	0,4	0,0
0,0	1,0	0,2	0,0
0,0	0,0	0,8	0,0
0,0	0,0	0,0	1,0

Obtíž je nyní v tom, že máme faktorovou matici, s jakou jsme se dosud nesetkali: jde o kolmé průměty na faktory. Tato matice se obvykle nazývá "faktorová struktura" a značí se symbolem "S". Protože zpravidla chceme při rotaci přihlídnout k jednoduché struktuře aspoň jako k vedlejšímu kritériu, převedeme ji na referenční vektory (matice V) podle vzorce (29)

$$V = S \phi^{-1} D \quad (29)$$

D = diagonální matice, jejíž elementy jsou reciprokými hodnotami odmocnin diagonálních elementů matice $(T'T)^{-1}$.

Při metodě pokusných vektorů dostáváme snadno enormně vysoké korelace mezi faktory, kterých se pak těžko zbavujeme. Jak tomu zabránit? Doporučujeme zvolit jen několik pokusných vektorů a ostatní faktory rotovat tak, aby byly kolmé ke všem pokusným vektorům i k sobě navzájem. Matematicky to je vždy možné.

2. Prokrustes

"Prokrustovská rotace" je poněkud pejorativní název pro rotaci, při níž se maximálně přibližujeme hypotéze vyjádřené přímo jako faktorová matice (obvykle matice referenčních vektorů V). Výpočet je složitý a vyžaduje samočinný počítač.

Podobně jako je tomu u metody pokusných vektorů, můžeme stanovit hypotézu jen pro omezený počet faktorů a zbytek ponechat beze změny.

Matematická formulace programu "Prokrustes" je následující: Je dána nerotovaná faktorová matice A a hypotetická matice referenčních vektorů V_h . Úkolem je najít takovou transformační matici Λ , aby rozdíl mezi maticemi $A\Lambda$ a V_h byl minimální.

Prokrustovská rotace má některé nedořešené problémy. Zejména často dosahuje vytčeného cíle za cenu extrémních (kladných nebo záporných) korelací mezi faktory. Tomu se dá odpomoci tím, že se dodržuje orthogonálnost ("orthogonální Prokrustes"). Logicky by však měly být součástí hypotézy i korelace mezi faktory. K tomu nebyl dosud vypracován program.

Prakticky se prokrustovské rotace používá jako výchozího bodu pro vizuální rotaci metodou rotaplot - přičemž se často doufá, že se dojde k "rozumným" úhlům mezi faktory a k přijatelné jednoduché struktuře, aniž by to vedlo k řešení radikálně odchýlnému od hypotézy.

3. Hypotéza pozitivních zátěží (positive manifold)

Řekli jsme (str. 62), že princip jednoduché struktury je svého druhu obecnou hypotézou. Podobnou, i když určitější, je hypotéza pozitivních zátěží, uplatňovaná s úspěchem při rotaci faktorů v oblasti schopností. Je známo, že testy rozumových (i jiných) schopností navzájem korelují zpravidla pozitivně a není logické, že by jejich faktory měly záporné zátěže. Proto je možno vyjít z nerotované faktorové matice, kde zpravidla všechny faktory kromě prvního záporné zátěže mají a vizuální rotací postupně záporné zátěže odstraňovat. Tak se dospěje poměrně rychle k faktorům dávajícím smysl. Při uplatnění hypotézy pozitivních zátěží je obvykle možno dodržet orthogonálnost rotace, kterou pak můžeme opustit v závěrečné fázi, máme-li k tomu věcné důvody.

4. Rotační alternativy

Jsou případy, kdy existuje více možností rotace, které dávají dobrý smysl. Jinak řečeno, některé korelační matice je možno vysvětlit více než jedním způsobem.

Použijeme Thurstonova příkladu, který dává zároveň dobrý vhled do řady vztahů ve faktorové analýze. (Viz Thurstone, 1947, str. 117.)

Mějme vzorek válců. Každý z nich je charakterizován svou výškou, poloměrem základny a specifickou vahou. Tyto tři parametry nechť jsou statisticky nezávislé.

- Stanovme 7 testů: 1. poloměr,
 2. výška,
 3. plocha základny,
 4. postranní část pláště ($r^2 \cdot v$),
 5. objem,
 6. diagonála (nejdelší úsečka, jež se do válce "vejde"),
 7. váha.

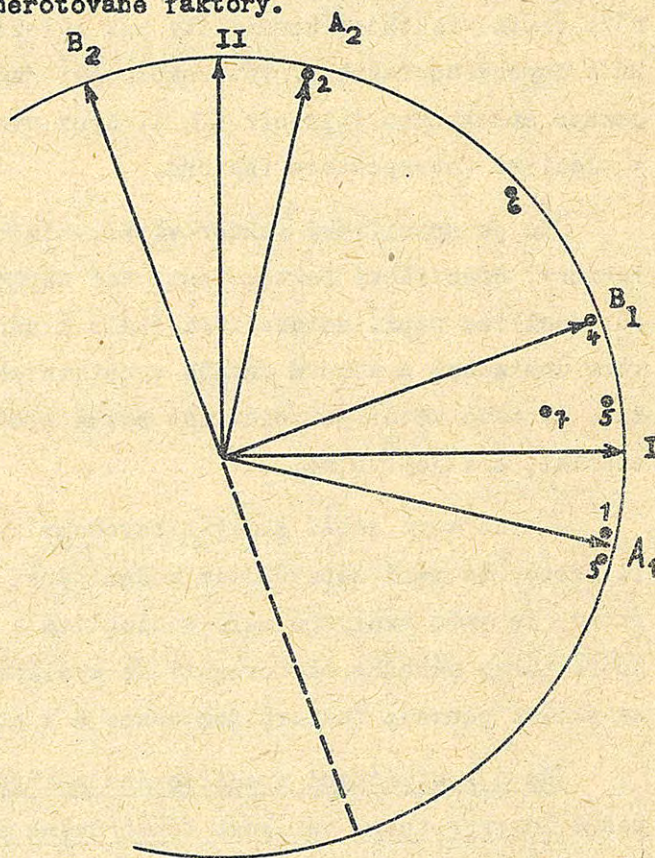
Vypočítejme individuální hodnoty (testová skóre) pro všechny dané válce a korelace mezi testy. Vzniklou korelační matici faktorujme.

Thurstone skutečně provedl odpovídající výpočty pro 27 válců. Výsledek faktorové analýzy je vyjádřen graficky obvyklým způsobem na obr. 20. Římskými číslicemi I a II jsou označeny nerotované faktory.

První rotační alternativa je naznačena faktory A_1 a A_2 . Faktor A_1 můžeme interpretovat jako tloušťku (šířku), faktor A_2 jako výšku.

Druhá rotační alternativa je naznačena faktory B_1 (faktor velikosti) a B_2 (faktor štíhlosti).

Specifické faktory jsou nepatrné, s výjimkou specifického faktoru testu 7. Avšak tento test (váha) je jediný, který je sycen faktorem specifické váhy¹⁾. Můžeme tedy říci, že tento specifický faktor je právě faktor specifické váhy. Kdybychom zařadili ještě další testy sycené tímto faktorem (rychlost volného pádu apod.), změnil by se tento specifický faktor ve společný faktor. Obecně platí, že specifický faktor každého testu je specifický vzhledem k dané korelační matici. Čím větší korelační matici faktorujeme, tím menší vycházejí - ceteris paribus - specifické faktory.



Obr. 20. Alternativní možnosti rotace v Thurstonově příkladu s válci (vysvětlení v textu).

1) Upozorňujeme na nepříjemnou náhodnou kolisi dvou významů termínu "specifický".

Zatímco v Thurstonově příkladě s válci můžeme specifický faktor testu 7 snadno interpretovat, při faktorování psychologických testů, o nichž víme velmi málo, zůstává specifický faktor často hádankou a - jde-li o test z jakéhokoli důvodu zajímavý - výzvou k dalšímu výzkumu.

K) Reliabilita testů a velikost faktorových zátěží

Do faktorové analýzy vstupuje pouze to, co působí korelace mezi testy, tj. komunalita. Vedle ní předpokládáme v každém testu specifický faktor a chybový faktor (viz str. 31).

Velikost každé zátěže záleží na tom, jak se mezi ně dělí komunalita daného testu. Velikost komunality pak záleží na velikosti specifického faktoru a chybového faktoru. Této okolnosti jsme se dotkli v souvislosti s jednoduchou strukturou (viz str. 63). Nyní uvážíme tyto vztahy podrobněji, a to z hlediska interpretace faktorů.

Čím je specifický faktor větší, tím méně zbývá na ostatní, společné faktory. Specifický faktor testu tak nepřímě vstupuje do interpretace faktorů. Jestliže např. dotazníková škála k měření sebevědomí má zátěž 0,3 ve faktoru dominance a nulové zátěže v ostatních faktorech, můžeme to interpretovat tak, že tato zátěž je relativně nízká proto, že sebevědomí s dominancí sice souvisí, ale jen volně.

Ale co když zátěž škály sebevědomí ve faktoru dominance je nízká nikoli proto, že mezi sebevědomím a dominancí je jen volná souvislost, nýbrž proto, že tato škála je málo spolehlivá a měření jí prováděné je silně syčeno faktorem náhodné chybovosti? Je myslitelné, že domnělá škála sebevědomí se skládá pouze z faktoru dominance a z chybového faktoru.

Jde o kontaminaci specifického a chybového faktoru, která nám brání bezpečně interpretovat velikost faktorových zátěží.

Známe-li spolehlivost všech testů v dané studii a tedy velikost každého chybového faktoru, využijeme toho ke zpřesnění interpretace. Upravíme všechny řádky faktorové matice do té podoby, jakou by měly, kdyby všechny testy byly absolutně spolehlivé. Za tím účelem dělíme každou faktorovou zátěž v nerotované (nebo jiné orthogonální) matici druhou odmocninou z reliability.

Uvedeného postupu se málokdy užívá. Jedním z důvodů je, že většinou neznáme reliabilitu všech faktorovaných testů.

x x x

Končíme kapitolu, která je klíčová pro pochopení faktorové analýzy. Viděli jsme, že zatímco extrakce faktorů je víceméně doménou matematické statistiky, v rotaci faktorů se uplatňuje jak pochopení daného problému, tak možnosti faktorové analýzy jako pružné a tvořivě použitelné metody.

Kapitola V. FAKTOROVÁ SKÓRE¹⁾

Faktorový výzkum obvykle končí rotací a interpretací faktorů. Faktorová matice spolu s maticí korelací mezi faktory představuje "čistý zisk" výzkumu.

Zbývá však učinit ještě jeden krok: odvození faktorových skóre, tj. individuálních skóre jedinců, z jejichž vzorku byly vypočítány korelace. Jde o hodnoty, jejichž znalost jsme ve faktorovém modelu předpokládali (str. 24). Například po provedení faktorové analýzy, v níž se objevil faktor dominance, můžeme odvodit pro každého jedince jeho individuální skóre v dominanci.

K čemu je tento poslední krok užitečný a proč se od něj většinou upouští?

1. V rámci výzkumu, jehož součástí je faktorová analýza, se většinou faktorová skóre neuplatní, protože faktorová matice spolu s korelacemi mezi faktory obsahuje všechny podstatné informace. Máme-li nebo hodláme-li získat další skóre v testech, jež nebyly pojaty do faktorové analýzy, můžeme je k výsledkům dodatečně přiřadit Dwyerovou extenzí. Pouze v případě, že máme důvodů předpokládat nelineární vztahy mezi některými z faktorů a některými testy, ať už byly či nebyly pojaty do faktorové analýzy²⁾, je výpočet faktorových skóre důležitý.

2. Pro praktickou aplikaci je odvození faktorových skóre nezbytné. Dále je nezbytné odvodit faktorová skóre, chceme-li na faktorový výzkum navázat dalším, nefaktorovým výzkumem. Toto použití objasníme na příkladě: V určité studii byl zjištěn faktor úzkosti. Máme nyní v úmyslu použít tohoto faktoru k přesnému měření vlivu psychoterapie na úzkostné pacienty určitého typu. K tomu potřebujeme faktorová skóre.

K odvození faktorových skóre potřebujeme výsledek faktorové analýzy, výchozí korelační matici a matici testových skóre. Použijeme vzorce

-
- 1) Tato kapitola je velmi krátká. Nenašli jsme v žádné z ostatních kapitol místo, kam by ji bylo možno logicky včlenit.
 - 2) Testy, které mají křivkový vztah k faktorům, mají patrně také křivkový vztah k testům, z nichž byly faktory odvozeny a neměly by být - je-li odchylka od linearity výrazná - vůbec pojaty do faktorové analýzy. - K tomu jen poznamenáváme, že kontrola linearity vztahů mezi testy, která by se před faktorováním měla provést, se často zanedbává.

$$\bar{F} = ZR^{-1}S \quad (30)$$

- $\bar{F}$ matice faktorových skóre (kde v každém řádku jsou všechna faktorová skóre jedné osoby)
- Z matice dat (kde v každém řádku jsou všechna testová skóre jedné osoby)
- R^{-1} inverze korelační matice (inverze je běžný úkon maticové algebry)
- S faktorová struktura (faktorová matice, která obsahuje kolmé průměty testů na faktory - nikoli na referenční vektory). V případě orthogonálních faktorů ovšem platí totožnost
- $$V = P = S.$$

Inverze větší korelační matice je bez samočinného počítače velmi pracná. Proto byly navrženy různé postupy, které jsou méně přesné, ale výpočetně mnohem schůdnější.

Prakticky se v nefaktorovém výzkumu, používajícím výsledků faktorové analýzy, pracuje s malým počtem testů a pak je pochopitelně výpočet jednodušší (ze všech tří matic rovnice (3) se vynechají řádky a sloupce odpovídající nepoužívaným testům).

Je samozřejmé, že rovnice (3) můžeme užít i pro výpočet faktorových skóre u osob, na nichž není založena faktorová analýza - ovšem jen tehdy, pocházejí-li z téže populace (ve statistickém smyslu slova), ze které byl vzat reprezentativní vzorek pro faktorovou analýzu. Rovnici (30) nepočítáme ovšem v každém individuálním případě. Odvodíme z ní pro každý test a faktor váhy, a to tak, že ji rozepíšeme a zjednodušíme pro skóre obecného jedince i ($z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}, \dots, z_{ni}$). Rovnice pro výpočet faktorového skóre jedince i v daném faktoru g pak vypadá např. takto:

$$F_{gi} = 0,42z_{1i} + 0,21z_{2i} - 0,36z_{3i} + 0,8z_{4i} \quad (31)$$

a dosazujeme do ní za hodnoty z individuální skóre v testech, převedená na standardní rozměr. Rovnici (31) lze ovšem upravit tak, aby do ní bylo možno dosazovat steny nebo jiná "vážená skóre".

Vypočítáme-li faktorová skóre pro dostatečný počet osob, můžeme je navzájem korelovat. Tak se dostáváme znovu k pojmu korelace mezi faktory, tentokrát jiným způsobem. Dosud jsme termínem "korelace mezi faktory" označovali kosiny úhlů svíraných faktorovými vektory (kososti).

Jaký je vztah mezi těmito dvěma různě odvozenými korelacemi mezi faktory?

Korelace mezi faktorovými skóre se poněkud liší od kosostí. Jsou -

z teoretického hlediska - méně přesné. Pro účely faktorové analýzy druhého řádu se lépe hodí kosiny (kososti). Pro praktické účely i pro účely nefaktorového výzkumu navazujícího na danou faktorovou studii je však třeba znát hlavně korelace mezi faktorovými skóre.

Kapitola VI. FAKTOROVÉ PROJEKTY

Ke schopnosti užívat matematicko-statistické metody patří také znalost jejího zasazení do celkového výzkumného projektu. Je třeba nejen ovládat vlastní "techniku" metody, nýbrž také umět s ní zacházet. Často se setkáváme se "statisticky vysoce významnými rozdíly", z nichž plynou pouze banální, samozřejmé závěry, nebo s formálně správným použitím statistických testů na data, ze kterých nelze danými technikami odvodit žádné závěry.

Také u faktorové analýzy je nutno znát zásady jejího užívání v celé souvislosti daného výzkumu. Faktorová analýza je dokonce po této stránce náročnější než jiné metody. Jednak se při jejím mechanickém užívání lehko dopustíme základních metodologických chyb, jednak snadno přehlédneme možnosti, které tato metoda při zasvěceném používání poskytuje.

A) Typy dat pro faktorování

Prozatím jsme se omezili na použití faktorové analýzy v případech, kdy je dáno větší množství jednorázových měření od většího množství probandů a kdy faktorujeme korelace mezi těmito měřeními (testy). To je skutečně nejčastější případ, není to však případ jediný.

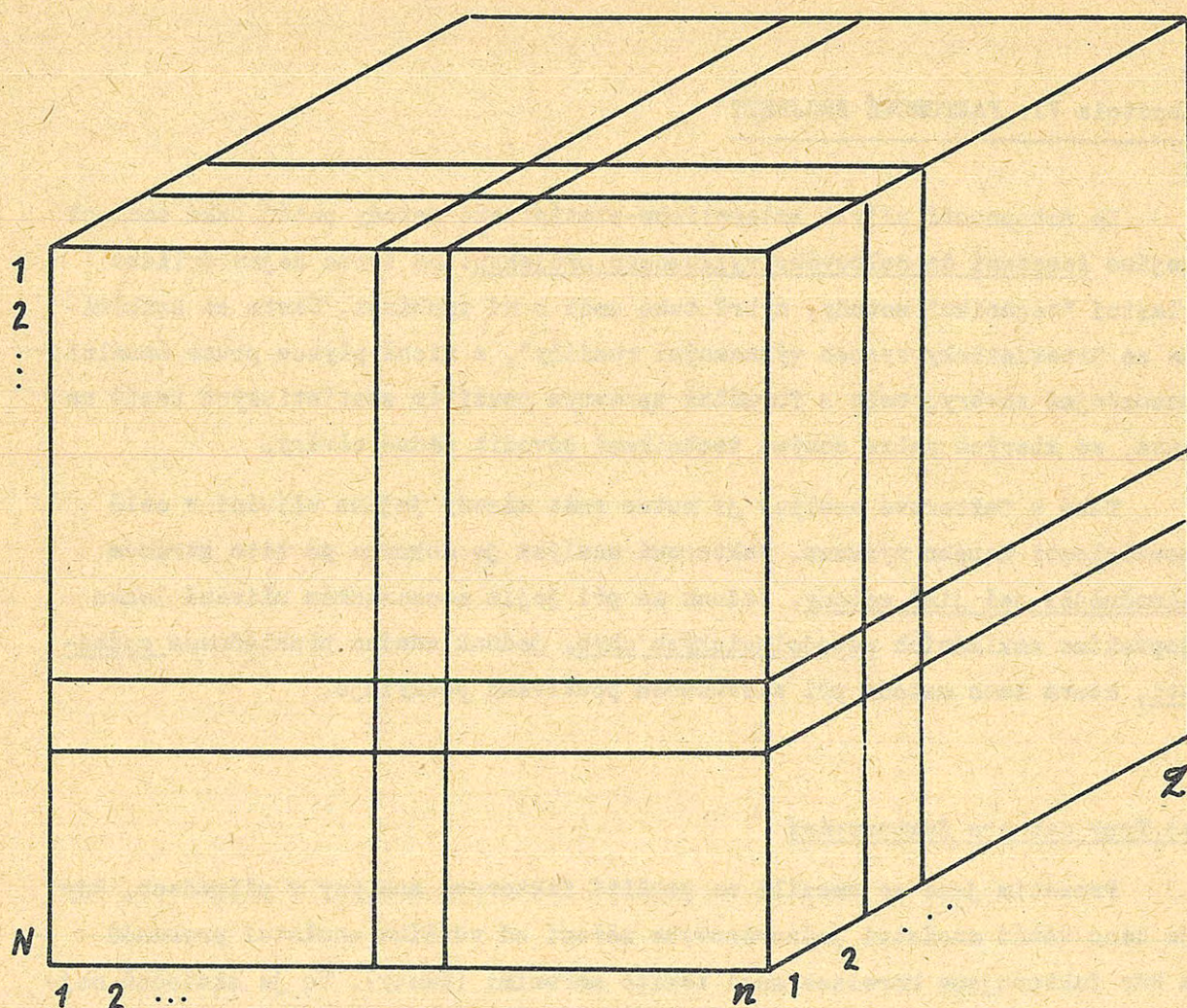
Vyjdeme z představy, že jsme u N osob provedli n testů, nikoli však jednorázově, nýbrž opakovaně, a to q -krát (třeba vždy po týdnu). Pak máme trojrozměrnou matici dat, Cattellem výstižně nazývanou "data box" (krabice dat). Znázorňujeme ji na obr. 21.

Krychle, která znázorňuje "krabici dat", je na obrázku popsána po třech hranách, které reprezentují její rozměry. Vertikálně jsou označeny osoby (probandi), zleva doprava testy, zpředu dozadu opakování. "Krabice obsahuje $n \times N \times q$ údajů, výsledků měření.

Z obsahu "krabice" můžeme získat dvojrozměrné matice dat třemi způsoby:

1. matice dat $N \times n$: v tomto případě vybíráme jedno opakování, zpravidla je to ovšem první prezentace a další se nekonají - což je nejobvyklejší případ získávání dat pro faktorovou analýzu. Mohli bychom však právě tak dobře prezentovat testy mnohokrát a pro faktorování vybrat kterékoli opakování. Proto jsme "plát", vykrojený z "krabice", neumístili zcela dopředu.

Jeho umístění znázorňuje kterékoli opakování.

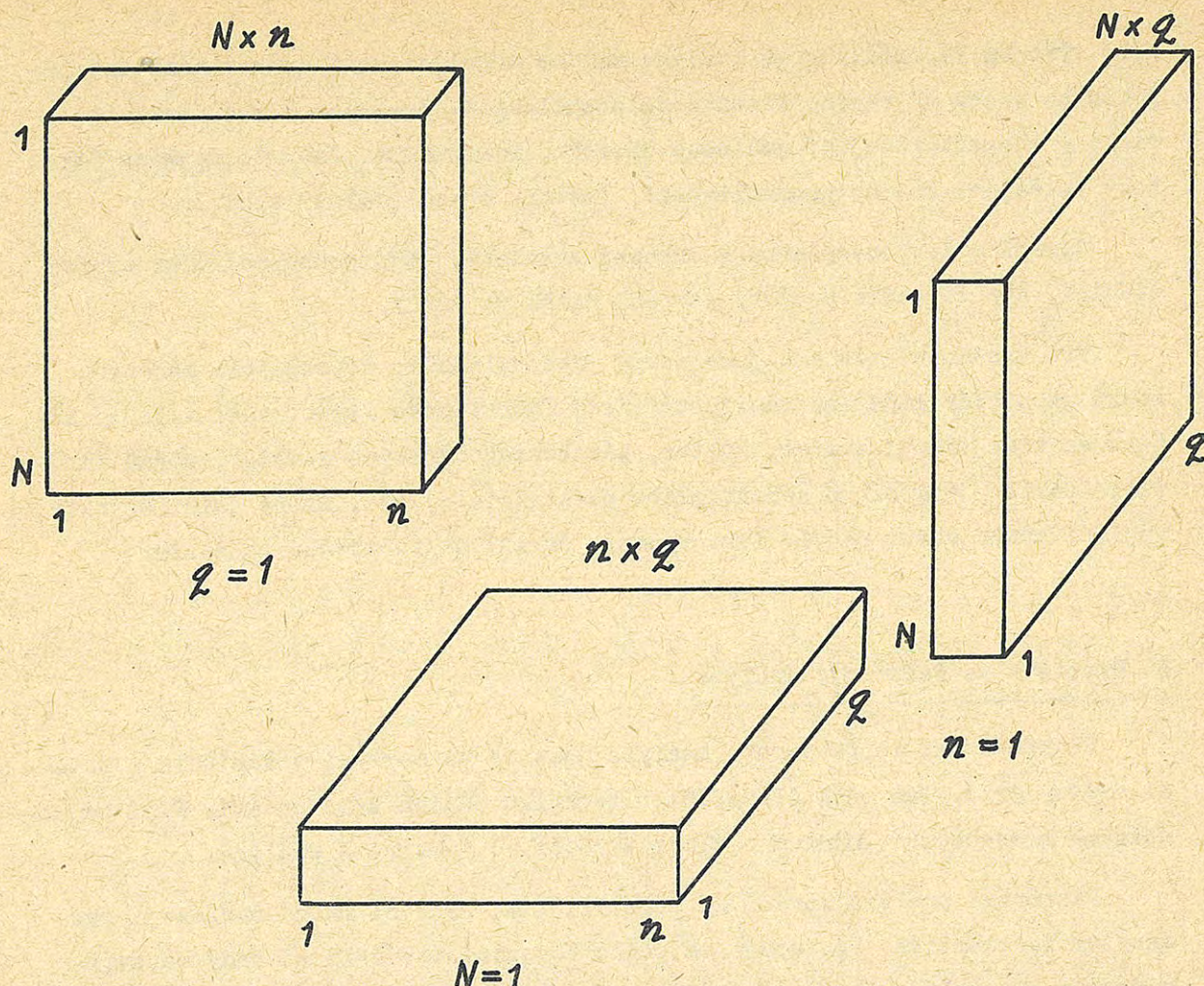


Obr. 21. Trojrozměrná matice dat s naznačenými možnostmi, jak z ní vyjmout různé dvojrozměrné matice dat.

2. matice dat $N \times q$: opakujeme-li tentýž test mnohokrát (což je někdy možné), získáváme matici dat o rozměrech $N \times q$, kde jsou výsledky ze všech opakování tohoto testu (kteréhokoli z n testů) u řady osob. Z této matice lze vypočítat korelace a faktorovat je.

3. matice dat $n \times q$: Konečně je možno "vyjmout z krabice" plát $n \times q$, vypočítat korelace a faktorovat data od jediného probanda. Podmínkou je mít k dispozici dostatečný počet opakování při dostatečném počtu testů (a není ovšem snadné najít velký počet testů, jež je možno opakovat, aniž se změní to, co měří).

Uvedené tři možnosti získání dvojdimenzionálních matic dat z "krabice" znázorňujeme schématicky na obr. 22.



Obr. 22. Tři možnosti získání dvojdimenzionální matice dat z trojrozměrné "krabice dat".

Každá ze tří uvedených matic dává ještě dvě možnosti, jak vypočítat korelace a z nich faktory: V prvním případě můžeme vyjít z korelací mezi testy nebo z korelací mezi lidmi. V druhém případě je možno vypočítat jak korelace mezi opakováními, tak i korelace mezi lidmi. V třetím případě to mohou být korelace mezi testy nebo korelace mezi opakováními. Tak máme odvozeno šest variant faktorové analýzy. Nebudeme podrobně probírat jejich výhody a nevýhody. Nejčastěji se vychází z matice $N \times n$, a to z korelací mezi testy. To je tzv. R-technika faktorové analýzy. V případě matice $N \times q$ se zdá snadnější vycházet z korelací mezi opakováními. Z této matice se však vychází málokdy. V matici $n \times q$ je patrně výhodnější faktorovat korelace mezi testy.

Z matice $N \times n$ získáme nejspíše faktory stabilních individuálních rozdílů, např. inteligence, extraverte apod. Z matice $N \times q$ můžeme zjistit, jak se mění faktorové složení (psychologická podstata) toho, co určitý test měří, jestliže ho mnohokrát opakujeme. Změny mohou být dány buďto nácvikem činnosti, jež je podstatou testu (Fleishmannova analýza testu motorické koordinace),

nebo vývojem (Hofstätterova analýza matice korelací mezi opakováními intelligenčního testu od raného dětství do dospělosti). Z matice $n \times q$ získáváme faktory charakterizující jediného člověka, individuum. Jsou to zejména faktory vnášející řád do proměnlivosti, faktory stavů (nálady apod.).

"Krabice dat" nevyčerpává všechny možnosti. Její pochopení však umožní čtenáři, aby si podle potřeby odvodil další varianty.

Pro usnadnění výkladu jsme dosud předpokládali, že nositeli měřených znaků jsou vždy lidé (až na ilustrativní Thurstonovo faktorování válců). Měření se však týká zvířat, kultur, národohospodářských soustav, pojmů (sr. známé faktory Osgoodova sémantického diferenciálu) atd. Mnohé další objekty, jejichž znaky dosud nebyly faktorovány, čekají na tvořivého badatele.

B) Hypotézy ve faktorové analýze

S hypotézami ve faktorové analýze jsme se už setkali v kapitole o rotaci (str. 82). Tam však šlo spíše o techniku jejich uplatňování. Nyní se dostáváme k obecnější diskusi o úloze hypotéz ve faktorové analýze.

Faktorová analýza ztrácí na prestiži tím, že v ní mnozí nacházejí své assylum ignorantiae. Postupuje se podle receptu: Nevíš-li si rady se svým výzkumem, zkoreluj všechno se vším a faktoruj! V množství faktorových zátěží se vždycky dá najít něco, co lze ex post zajímavě interpretovat. K čemu solidní intelektuální příprava výzkumu, nač si lámat hlavu s formulováním hypotéz, které by mohl oponent prohlédnout jako epigonské, banální nebo teoreticky nezdůvodnitelné? To vše lze skrýt za štít faktorové analýzy, jež jako by byla ochrannou známkou, puncem vědeckosti ...

Je však zřejmé, že role hypotéz ve faktorové analýze (přesněji: role faktorové analýzy ve vztahu k hypotézám) je poněkud jiná než je tomu u běžných matematicko-statistických metod. Zpravidla se zde netestuje statistická významnost rozdílů, neformuluje se nulová hypotéza. Jako by faktoroví analytici skutečně čekali, "až co vyjde". Je tomu tak skutečně?

Výklad o povaze hypotéz ve faktorové analýze rozdělíme na tři odstavce:

1. Analogie s mapou. Faktorový výzkum se do jisté míry podobá výzkumné výpravě, jež má za úkol pořídit mapu určitého území. Taková expedice si může předsevzít, že odpoví na určité otázky, např.: Jsou na daném území hory vyšší než 2.500 m? Obtéká řeka K. horu Z. z jihu nebo ze severu? Převládá v daném území poušť nebo džungle? Cítíme však, že tyto otázky ("hypotézy") jsou chudé ve srovnání s bohatstvím poznatků, které vědecký tým pravděpodobně přinese

z dobře vedené výpravy. Podobně je tomu v psychologickém výzkumu. Faktorová analýza často přinese poznatky, jejichž možnost jsme sotva tušili. Thurstone a po něm Cattell mluví o schopnosti faktorové analýzy vytvářet hypotézy a dávat odpovědi na otázky, které předem ani nebyly položeny.

Jaké vlastnosti by měl mít v tomto případě faktorový projekt, má-li vést k plodnému výzkumu? Odpověď najdeme studiem faktorové analytické literatury. Dobrý faktorový projekt bez hypotéz musí být inteligentní v nejlepším slova smyslu. Každý použitý test je vlastně otázkou, každý nápad, co by mohlo být zajímavé, má heuristickou cenu. Provádí-li výzkum badatel s dobrým postřehem a citem pro testy a pro korelační vztahy, vyrůstá mu pak pod rukama faktorový obraz - mapa dané oblasti. Inspirován na každém kroku (celkovou výškou a "rozptylem" korelací, počtem faktorů a trendem vlastních čísel, vlastnostmi nerotované faktorové matice atd.) dochází faktorový analytik k výsledku, jehož průkaznost je daleko spíše v celkové přesvědčivosti a přitažlivosti pro vědeckou obec, než ve formálním odpovídání na formální otázky, jak je představuje typický experimentální výzkum s analýzou variance, t-testy apod.

2. Implicitní hypotézy. Při četbě posledního odstavce může mít čtenář pocit, že není zcela přesvědčivý. Reprezentuje skutečně spíše názor Thurstone a Cattella, případně jejich žáků, než náš vlastní názor. Domníváme se, že v dobrém projektu faktorové analýzy jsou vždy implicitně obsaženy určité hypotézy.

Nejvíce se implicitní, nepřiznané a často autorům samým neznámé hypotézy uplatňují při výběru testů pro daný výzkum. Cattell mluví o tom, že je jen třeba danou oblast "stejněměrně pokrýt" testy a pak se spolehnout na "hypothesis-generating power" faktorové analýzy. To se nám zdá z obecně metodologického hlediska nedomyšlené a Cattell ostatně přiznává, že nelze nijak zaručit ono stejnoměrné pokrytí. Stačí nahromadit několik velmi podobných testů a máme prakticky zaručeno, že vyjde faktor, který bude tuto skupinu sytit. Každý autor se soustředí na testy, které jsou mu z nějakého důvodu osobně blízké - třeba proto, že v nich hledá odpověď na svůj osobní problém. V jistém smyslu platí, že badatel je svou vlastní nejdůležitější pokusnou osobou - a to právě tím, jaké neuvědoměné, implicitní hypotézy do svého projektu vkládá.

3. Explicitní hypotézy. Je sice pravda, že ve vědě dochází často k objevům nečekaně, jakoby náhodou (Pavlovův objev podmíněného reflexu při výzkumu trávení apod.), z toho však nelze dělat pravidlo. Ve faktorové analýze - stejně jako při každém jiném vědeckém výzkumu - platí všeobecná metodolo-

gická zásada, že je záhodno maximálně si ujasnit, s jakými teoretickými předpoklady ke své úloze přistupujeme a jaké výsledky očekáváme.¹⁾

Uvedeme několik typických druhů hypotéz, které lze formulovat pomocí faktorového modelu a řešit faktorovou analýzou.

(a) Počet faktorů v dané oblasti

Nejjednodušší explicitní hypotézou je hypotéza o počtu faktorů (samozřejmě společných faktorů) v dané oblasti. Tato oblast může být vymezena různým způsobem. Mohou to být "všechny subtesty Wechslerova testu WAIS" nebo "všechna adjektiva v české řeči, která charakterizují lidskou povahu" nebo "symptomy infarktu myokardu" apod. Také předpokládaný počet faktorů může být různý.

Mohli bychom mít "nihilistickou" hypotézu, že počet společných faktorů je nulový. To bychom ovšem s faktorovou analýzou - až na výjimečné případy - ani nezačínali a spokojili bychom se zjištěním, zda distribuce korelačních koeficientů v dané korelační matici odpovídá náhodné distribuci korelačních koeficientů při daném počtu osob.

Důležitá je hypotéza jediného společného faktoru. Až donedávna se např. konaly výzkumy se sebevědomím (jaký vliv na ně má neúspěch atd.), přičemž se předpokládalo, že dotazníky, sestavené k měření sebevědomí, měří něco jednotného. Faktorová analýza většího množství dotazníkových položek, o nichž se běžně předpokládalo, že měří sebevědomí, ukázala existenci několika společných faktorů.

K termínu "jediný společný faktor" je třeba poznamenat, že ho nelze vždy brát v absolutním smyslu. Může se ukázat, že společných faktorů je několik, že však kromě jednoho jsou prakticky zanedbatelné, bezvýznamné (i když někdy statisticky signifikantní)²⁾.

Velký historický význam má Spearmanova teorie obecného intelektového faktoru "g". Působení tohoto faktoru Spearman přičítal všechny korelace mezi běžnými testy rozumových schopností. Nešlo zde však jen o to, zda faktor "g" je jediný (hypotéza o počtu faktorů), nýbrž také o jeho psychologickou

1) Za nedoceňování hypotéz u některých faktorových analytiků bychom mohli hledat pozitivistickou mentalitu.

2) Tento způsob uvažování může pracovníky některých oborů iritovat. V psychologii osobnosti se však setkáváme na každém kroku s mnoha "stopovými" faktory malého významu a nejasné povahy i etiologie, které se často objeví vlivem nepodstatných okolností výzkumu.

podstatu, která byla uspatřována ve vyvozování logických vztahů (eduction of relations).

(b) Ověření existence předpokládaného faktoru

V psychologii koluje mnoho pojmů, o nichž není známo, co empiricky zjištělného jim odpovídá. Mohli bychom se např. ptát, zda existuje "inhibovanost" jako vlastnost (faktor individuálních rozdílů) nebo jako stav (faktor rozdílů v čase). Z teoretických premis bychom odvodili, jakými prožitky, jakým chováním (o němž můžeme mít výpovědi probandů samých nebo různých pozorovatelů atd.), jakými psychofyzilogickými a testovými parametry by se měla inhibovanost projevovat. Příslušnou korelační maticí bychom pak faktorovali s nadějí, že jeden z nalezených faktorů bude možno označit jako inhibovanost.

V podobných případech musíme být připraveni na to, že naše hypotéza se potvrdí jen částečně (resp. že se potvrdí jen část dílčích hypotéz, jež ověřujeme). Ukáže se například, že inhibovanost lze měřit testy a posudky, nikoli však dotazníkem, případně že existují dva nebo více dílčích faktorů inhibovanosti. To je časté: pojem, který je na verbální úrovni snadné stanovit dosti široce, se při pokusu o operacionalizaci rozpadne na několik faktorů - někdy korelovaných, jindy zcela nezávislých.

(c) Ověření odlišnosti faktorů

Můžeme se ptát, zda dvěma nebo více vlastnostem, které se v teorii odlišují, odpovídá příslušný počet faktorů. Například když se objevil pojem tvořivosti (creativity), bylo třeba odlišit jej od obecné inteligence nejen verbálně - teoreticky, nýbrž i operacionálně. Do jaké míry vyčerpává faktor obecné inteligence korelace mezi různými mírami tvořivosti? Co zbývá pro nový faktor? Hypotéza však může znít i jinak: Jestliže včleníme do souboru tradičních testů rozumových schopností skupinu testů tvořivosti, dostaneme několik korelovaných faktorů, mezi nimi faktor tvořivosti, a obecná inteligence se objeví jako faktor druhého řádu. Podle této teorie by tvořivost byla dosavadními testy zanedbávanou složkou (aspektem) obecné inteligence.

(d) Jiné typy hypotéz ve faktorové analýze

Faktorovou analýzou je možno ověřovat nejrozumnější globální i dílčí hypotézy. Jako příklad vynalézavého použití faktorové analýzy můžeme uvést Eysenckův výzkum, který ověřoval následující hypotézu: Neuroticismus jako faktor individuálních rozdílů mezi normálními (neléčenými) lidmi je totožný s faktorem, v jehož míře se odlišují neurotici od normálních osob. Jinak

řešeno: neuroticismus je kontinuum, na němž lze umístit všechny lidi a na jehož extrému jsou neurotici. Eysenck faktoroval na vzorku normálních osob testy různě citlivě odlišující neurotiky od ostatních lidí. Faktory rotoval tak, aby zátěže testů v jednom z nich byly proporcionální jejich citlivostem (aby nejcitlivější měl nejvyšší zátěž atd.). Skutečnost, že taková rotace byla možná, můžeme považovat za silnou podporu uvedené hypotézy.

Průkaznost výsledků ve faktorové analýze

Při studiu a používání faktorové analýzy nám často pomůže vědomí, že výsledný faktorový obraz, získaný z korelační matice, je jedním z možných, že však nepředstavuje jedinou možnost. Jak jsme už viděli v kapitole o rotaci, výsledek faktorové analýzy není jednoznačně dán výchozími daty a pevně stanovenými postupy. Zpravidla bychom měli uzavírat takto: Hle, zde je korelační matice a zde jsou faktory, které jsem z ní odvodil. Považujete-li tento výsledek za rozumný, přijměte jej a navazujte na něj, v opačném případě navrhněte jiné řešení.

Toto pojetí se zdá některým badatelům příliš subjektivistické. Zejména matematikové zabývající se faktorovou analýzou stále usilují o něco objektivnějšího. Opírají se pak více o jednoznačná kritéria, například o nejlepší dosažitelnou jednoduchou strukturu, přičemž často používají analytických rotačních programů. Kdyby se ukázalo, že existuje způsob rotace, který je za každých okolností optimální (nebo aspoň vhodný), bylo by ideální shodnout se na něm a vždy ho používat. Zatím se však nezdá, že bude takový způsob nalezen. Jednoznačné kritérium lze sice stanovit, nelze však říci, které z mnoha stanovitelných jednoznačných kritérií je optimální. Faktorová analýza zůstane nástrojem, se kterým je třeba zacházet s citem, vynalézavostí a znalostí dané problematiky.

To, že každý faktorový obraz znamená jen jednu z možností, není dáno jen nekonečným množstvím možností rotace. Jde i o stanovení počtu faktorů. Připomeňme znovu "metodologickou pochybnost" ze str. 53. Hypotéza jediného faktoru v dané korelační matici ve správné formulaci zní: Všechny zjištěné korelace je možno přičíst jedinému společnému faktoru. Tuto zásadní "opoziční" myšlenku G.H. Thomsona by bylo škoda zapomenout.

Konečně, jak jsme se už zmínili a jak se k tomu opět vrátíme, je často prakticky nemožné stanovit jednoznačné kritérium pro výběr testů do korelační matice. Výběr testů značně ovlivňuje výsledek. I z tohoto hlediska je třeba závěr faktorové studie chápat jako možnost, která se prosadí jen tehdy, bude-li stimulovat další badatele a usnadní-li jejich práci. Což konec konců

platí pro kterýkoli vědní obor¹⁾, v psychologii osobnosti je to jen zřejmější než jinde.

C) Faktorový projekt v užším smyslu

Faktorovým projektem v užším smyslu rozumíme naplánování výzkumu tak, aby při zpracování výsledků bylo možno použít faktorové analýzy. Sestavení racionálního faktorového projektu se musí řídit daným cílem výzkumu a není možno dát univerzální návod pro všechny případy. Některá pravidla však mají dosti obecnou platnost. Těmi se budeme nyní zabývat.

1. Rozsah dat

Pro rozsah dat platí ve faktorové analýze jednoduchá přibližná pravidla:

$$N > 3n$$

$$n > 2m$$

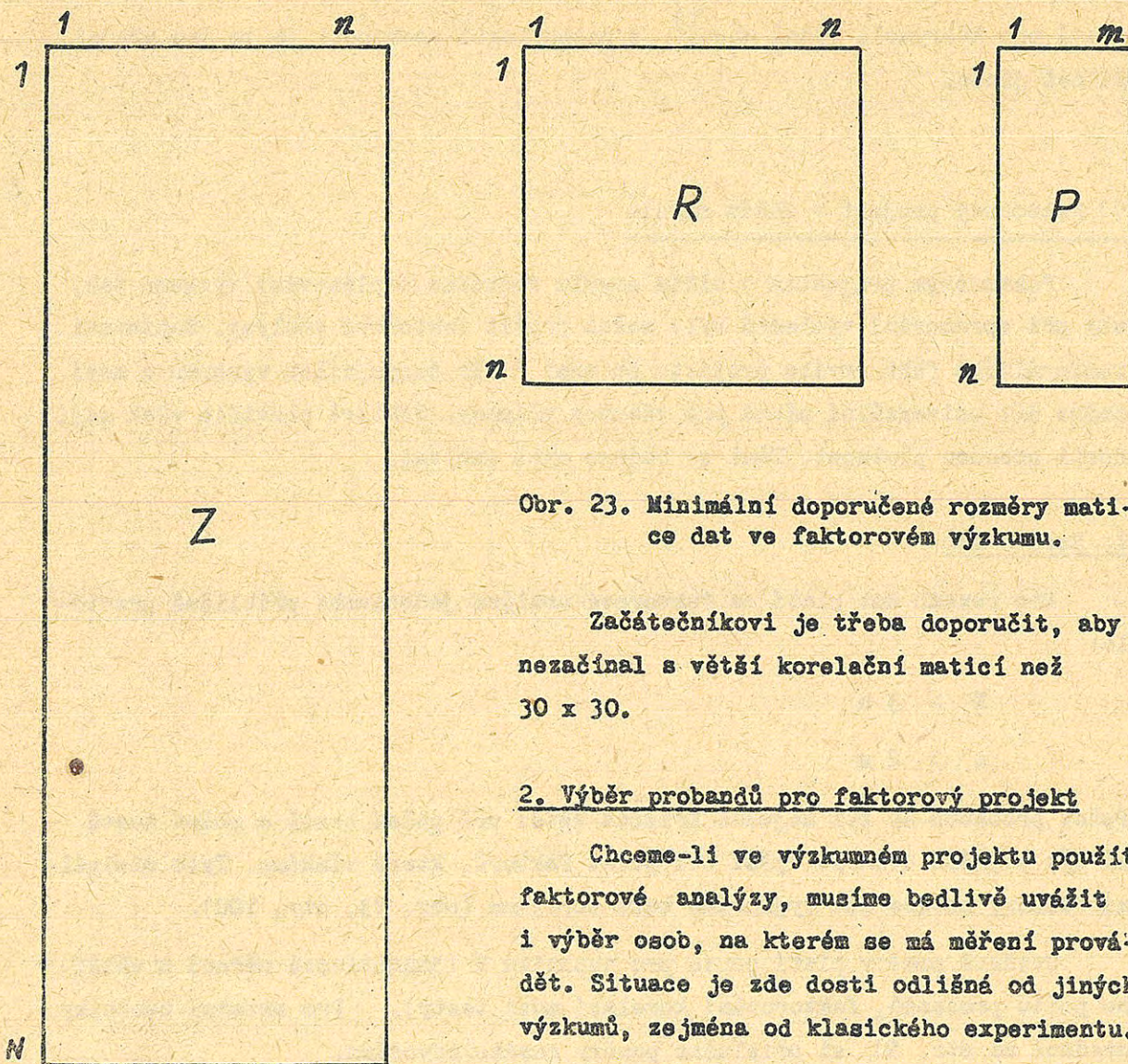
Počet probandů má být nejméně třikrát větší než počet testů a počet testů má být nejméně dvakrát vyšší než počet faktorů, které získáme. Tyto minimální rozměry matice dat vyjádříme také obrázkem (obr. 23, str. 100).

Uvedené poměry platí pouze pro techniku R (jednorázová měření u většího počtu probandů, faktorování korelací mezi testy). Pro ostatní techniky uvedené na str. 91 si příslušné poměry snadno odvodíme.

Na obrázcích 21 a 22 na str. 93 jsme vyjádřili dvojrozměrné matice dat vzniklé vyjmutím "plátu" z "krabice" přibližně čtvercové. Podle právě uvedeného pravidla by to měly být obdélníky - vždy podle toho, zda chceme faktorovat korelace mezi testy nebo mezi osobami, případně mezi opakováními: ten rozměr matice dat, který je shodný s rozměrem korelační matice, má být nejméně třikrát menší než druhý rozměr.

Pravidlo pro rozsah dat zakládáme na názorech Cattella, Tuckera a dalších odborníků, kteří se ovšem zcela neshodují. Cattell má sklon být - podobně jako v jiných otázkách - méně přísný. Po určitých zkušenostech můžeme od případu k případu stanovit i "měkčí normu" podle toho, kolik předem víme o faktorech v dané oblasti, podle spolehlivosti testů a výšky korelací, kterou odhadneme z předběžných výpočtů na malém vzorku atd.

1) Obecně řečeno: vědecká pravda má sociální povahu.



Obr. 23. Minimální doporučené rozměry matice dat ve faktorovém výzkumu.

Začátečníkovi je třeba doporučit, aby nezačínal s větší korelační maticí než 30×30 .

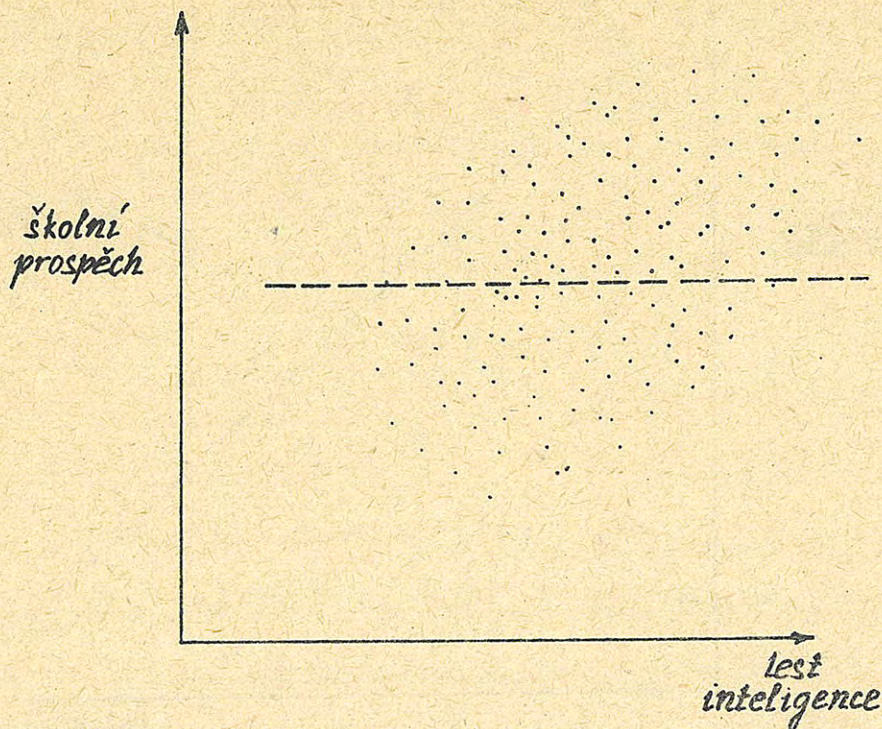
2. Výběr probandů pro faktorový projekt

Chceme-li ve výzkumném projektu použít faktorové analýzy, musíme bedlivě uvážit i výběr osob, na kterém se má měření provádět. Situace je zde dosti odlišná od jiných výzkumů, zejména od klasického experimentu.

(a) Výběrový charakter korelace

Základním stavebním prvkem faktorové analýzy je korelace mezi dvěma proměnnými. Všimněme si proto nejprve, jak je korelace závislá na vzorku osob, na kterém ji zjišťujeme.

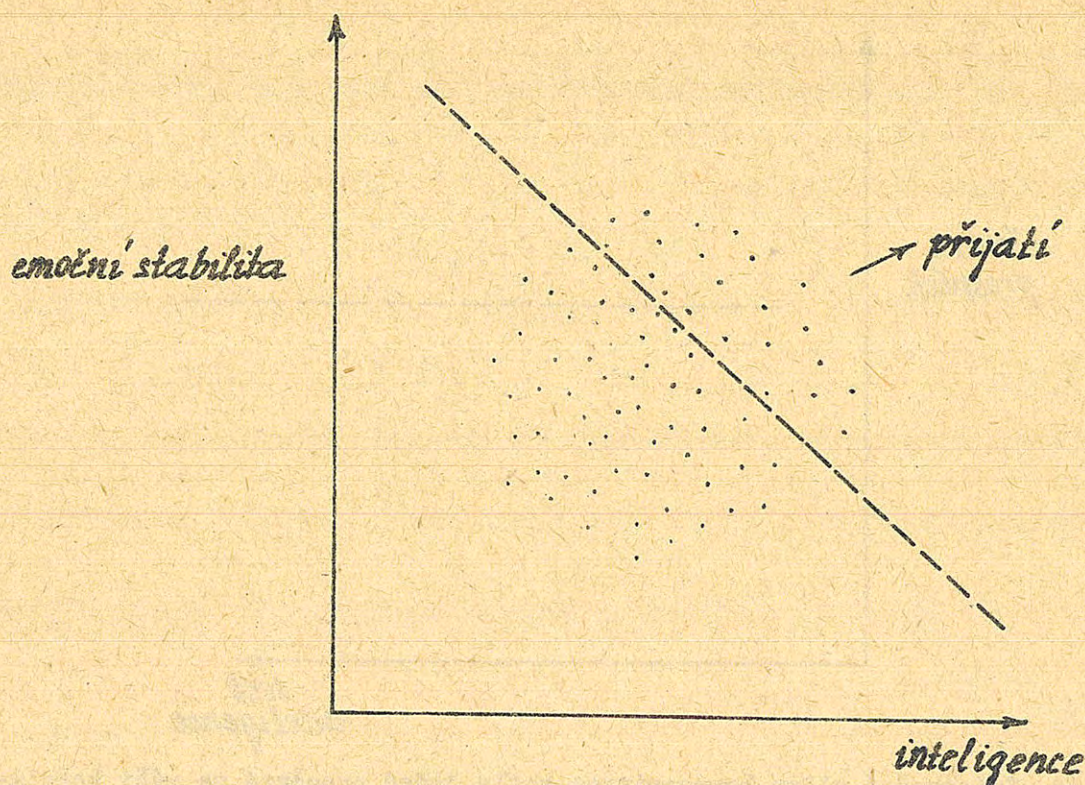
Základní význam zde má pojem homogenity výběru. V experimentální metodologii se zpravidla doporučuje co nejhomogennější výběr (např. se použije pouze mužů v rozmezí od 20 do 22 let, kteří mají aspoň maturitu na střední škole a inteligenční kvocient v mezích od 100 do 115, pocházejí přibližně ze stejného sociálního prostředí atd.). Jaký vliv však má homogenita vzorku na korelaci? Všeobecně lze říci, že homogenizace vzorku z hlediska kterékoliv proměnné snižuje korelaci mezi touto proměnnou a kteroukoli jinou proměnnou. Například školní prospěch koreluje dosti vysoko pozitivně s výsledkem inteligenčního testu. Tuto korelaci můžeme vyjádřit grafem (viz obr. 24, str.101).



Obr. 24. Znázornění vlivu homogenizace podle jedné proměnné na výši korelace. (Vysvětlení v textu.)

Provedeme-li diferenciaci podle prospěchu, tj. soustředíme-li prospěchově lepší děti do jedné třídy a prospěchově slabší do druhé, pak v každé z těchto dvou tříd dostaneme podstatně nižší korelaci, než kdybychom diferenciaci neprovedli a v obou třídách by zůstal tentýž rozptyl pokud jde o prospěch. (Diferenciací podle prospěchu snižujeme ovšem i rozptyl inteligence v obou třídách.)

Zvláštní případ, který zřetelně dokládá výběrový charakter korelace, je možno pozorovat na některých školách, kam se dostává - na základě přísných zkoušek - jen malá část uchazečů. Úspěch u zkoušky - zvláště ústní - je závislý mimo jiné na inteligenci a na emoční stabilitě. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že tuto závislost je možno vyjádřit lineární kombinací, že obě vlastnosti jsou stejně důležité a dále že úspěch je závislý pouze na těchto dvou vlastnostech. Mezi uchazeči o studium na takové škole je - stejně jako v celé populaci - zhruba nulová korelace mezi inteligencí a emoční stabilitou. Mezi těmi, kteří byli vybráni ke studiu na základě uvedených dvou vlastností (za popsanych zjednodušených okolností) najdeme zápornou korelaci mezi inteligencí a emoční stabilitou (viz obr. 25).



Obr. 25. Grafické znázornění korelace mezi inteligencí a emoční stabilitou v populaci (všechny body) a ve vzorku žáků přijatých na výběrovou školu na základě zkoušky, v níž rozhodovaly obě tyto vlastnosti.

Kvantitativní homogenizace vzorku podle jednoho nebo více testů je však jen jedním případem vlivu, který působí proměnlivost korelací mezi těmiž proměnnými od vzorku ke vzorku. Korelace mezi různými testy jsou často poněkud (nebo i značně) jiné u mužů než u žen, u psychotiků než u normálních osob, u komínků než u pojišťovacích agentů a ovšem jiné u lidí, kteří stěží umějí číst a psát než u těch, kteří mají velmi dobré vzdělání. Jakýkoli údaj o korelaci je tedy neúplný (ne-li dokonce klamný), není-li přesně řečeno, na jakém vzorku byl zjištěn.

(b) Výběrový charakter faktorů

Výběrový charakter korelací má za následek i výběrový charakter faktorů (případně i korelací mezi faktory). Udává se např. (Vernon, 1961), že výsledkem faktorové analýzy testů schopností u branců byl obecný inteligenční faktor vysvětlující 50 % variance, zatímco faktorování týchž testů u skupiny kandidátů důstojnické školy vedlo sice také k obecnému inteligenčnímu faktoru, ten však vysvětloval pouze 15 % variance. Guilford, který konal své výzkumy na velmi homogenní skupině vysoce inteligentních mužů, dokonce popírá existenci obecného inteligenčního faktoru a popisuje několik desítek faktorů

rozumových schopností, jejichž korelace jsou nulové (Guilford, 1967). Obecně můžeme říci, že kvantitativní homogenizace (v daném případě podle celkové mentální úrovně) vede k rozrůzněnějšímu obrazu schopností, k většímu množství speciálnějších ("užších") faktorů. Faktor obecné inteligence (a tedy i měření inteligenčního kvocientu) má ve vysoce homogenní populaci malý význam.

Někdy se provádí faktorová analýza projevů psychiatrických pacientů. Skupina těchto pacientů představuje velmi složitý výběr, který také silně ovlivňuje korelace a z nich odvozené faktory. To je celkem pochopitelné. Psychiatr musí samozřejmě klasifikovat své pacienty podle jiných kategorií a hodnotit je v jiných "dimenzích", než které se hodí pro popis normální, zdravé osobnosti. Psychologové mají ovšem často sklon používat psychopatologických pojmů pro popis normální osobnosti.

Zde narážíme na zajímavý problém. Psychiatr (a po něm psycholog) může říci, že u jistého normálního člověka sledává náznaky hysterických reakcí nebo cyklotýmního temperamentu a tyto výroky mohou mít velmi dobrý smysl. Jsou však lidé, na kterých psychopatologické pojmy prostě selhávají, nevystihují jejich osobnost (ani v záporném smyslu). Pak nám často chybí vhodné pojmy, protože psychologie osobnosti se doposud daleko více zabývala nešťastnými, disharmonickými a selhávajícími než šťastnými, harmonickými a úspěšnými lidmi.

Jak uvést tyto myšlenky v soulad s předpokladem univerzálnosti vlastností (viz str. 8)? Jedna možnost je prohlásit, že potřebujeme diferencovat mezi lidmi, kteří mají psychopatologické vlastnosti prakticky v nulové míře. Pro každého z nich je velmi důležité, že je má v nulové míře, neboť tím je zaručeno jeho duševní zdraví. Avšak pro pochopení individuálních rozdílů ve skupině takto výrazně normálních lidí jsou pak psychopatologické pojmy nutně irrelevantní. Tato možnost předpokládá silně zešílené rozložení příslušných vlastností. - Druhá možnost (konceptuálně natolik složitá, že ji zde nemůžeme rozvádět) je vycházet z toho, že se v určité populaci sice vyskytují jednotlivé symptomy, ale že se nevytvářejí korelační syndromy jako v jiné populaci.

(c) Potřeba univerzálních faktorů

Je samozřejmé, že popisné pojmy, které se na někoho hodí a na někoho nehodí, jsou méně přitažlivé než pojmy univerzální. Proto se i faktorová analytika snaží, aby jejich faktory měly co nejširší platnost.

Obecně řečeno, výsledkem výzkumů je určitý kompromis mezi univerzálností a adekvátností faktorů. Kdyby např. bylo naším cílem zkoumat do všech

detailů osobnost středoevropského adolescenta - studenta, dospěli bychom po řadě faktorových analýz k jemně prokreslenému obrazu, k systému faktorů, který by byl velmi adekvátní pro popis jednotlivců této skupiny, ale který by se už hůře hodil na adolescenty - učně, nemluvě o dospělých lidech ve Spojených státech nebo dokonce v Japonsku.

Konkrétní podobou, výzkumnou realizací uvedeného kompromisu je použití vzorku, který je v určitých směrech heterogenní. Například při faktorové analýze, jež má být základem nového osobnostního dotazníku, použijeme adolescentů i dospělých obojího pohlaví z různých společenských vrstev, i když to vyloučí použití mnoha otázek, které by se velmi dobře hodily jen pro adolescenty nebo jen pro ženy nebo jen pro lidi s vyšším vzděláním apod., případně otázek, které mají pro každou z těchto skupin jiný smysl.

Ve speciálních případech můžeme zjistit ve značně odlišných homogenních vzorcích identické nebo téměř identické faktory, odvozené někdy částečně nebo úplně z jiných testů. Je např. pravděpodobné, že Eysenckovy faktory extraverte - introverte, neuroticismus a případně psychoticismus lze považovat za antropologicky víceméně univerzální, a že by je bylo možno zjistit ve většině kultur, i když na základě odlišných testů. Daleko skeptičtější jsme v tomto směru ke známým Cattellovým šestnácti osobnostním faktorům, i když Cattell sám je za univerzální považuje. To je příliš jemný obraz, který se do značné míry hroutí již při převodu do našeho kulturního prostředí.¹⁾

Domníváme se, že většina dosud popsaných faktorů je předčasnou generalizací. Zjistíme-li např. určité faktory na základě studie, ve které byly faktorové analýze podrobeny posudky různých znaků a projevů patnáctiletých dětí (zachycené posuzovacími škálami), jak je interpretovat? Měli bychom mluvit o korelačních trendech těchto posudků, které jsou ovlivněny nejen specifičností našeho vzorku posuzovaných dětí, ale také specifičností vzorku našich posuzovatelů; ostatně nevíme ani, jakým způsobem a v jakých poměrech se v nich mísí dimenze laického psychologického povědomí s dimenzemi pozorované skutečnosti. Touha po laciné originalitě bohužel dovedla některé

1) Faktory osobnosti zpravidla "vznikají" - zejména v Americe - jako výsledek studií konaných na studentech 1. ročníků vysoké školy. (Na tuto úzkou základnu velké části empirické psychologie bylo už vícekrát poukázáno.) Tito studenti jsou pro mnoho autorů snadno dosažitelní i snadno testovatelní. Zjištěné faktory se pak hledají u různých vzorků dospělých i dětí s různým vzděláním a z různých sociálních vrstev, případně se ověřuje jejich existence v jiných kulturách ve snaze prokázat jejich univerzálnost.

autory k objevům "faktorů osobnosti", které se nepodařilo a patrně nepodaří nezávisle ověřit.

(d) Praktické pokyny

Jak si prakticky počínat při výběru vzorku pro faktorovou analýzu? Pro konkrétní rozhodnutí je třeba mít především na mysli účel faktorování. Jestliže šlo Guilfordovi o nalezení velkého počtu jemně odlišených faktorů v rozumových schopnostech, kterým by bylo možno nakonec přiřadit funkční systémy, tedy o podrobné vymapování intelektových funkcí, bylo namístě pracovat s homogenními vzorky o vysoké mentální úrovni. Mají-li však faktory schopností sloužit jako teoretický základ pro sestavení široce použitelné inteligenční baterie, je vhodnější pracovat s reprezentativním vzorkem populace: výsledkem bude daleko jednodušší a hrubší, ale univerzálnější a pro daný účel užitečnější faktorový obraz. Chceme-li zkoumat dimenzionalitu citových stavů přístupných introspektivnímu pozorování, zvolíme patrně vysokoškolské studenty humanitního směru (snad uměleckého nebo jazykovědného zaměření - raději nikoli psychology, kteří by mohli být indoktrinováni) apod. Při studiu postojů v sociologii použijeme patrně vždy reprezentativního vzorku populace, o které chceme dělat závěry.

V základním výzkumu je často vhodný co nejhomogennější vzorek (nebo paralelně několik různých homogenních vzorků). Avšak není tomu tak vždy. Někdy převažuje výhoda heterogenního vzorku, kterou jsme dosud neuvedli: Heterogenitu můžeme popsat několika proměnnými (např. věk, sociální status, inteligenční kvocient, dichotomie muž-žena, černocho-bělocho, kuřák-nekuřák apod.). Tyto proměnné můžeme pojmut do faktorové analýzy, a to buď spolu s ostatními, základními proměnnými, nebo dodatečně, pomocí Dwyerovy extenzní analýzy (viz str. 55) z důvodů, které probereme v souvislosti s výběrem testů pro faktorovou analýzu. Proměnné tohoto druhu mají velkou přednost; jsou zpravidla spolehlivé a snadno interpretovatelné. Můžeme se o ně proto opřít při interpretaci (či "identifikaci") faktorů. Kdy převažují výhody homogenního a kdy heterogenního vzorku, lze těžko posoudit bez určité sčítlosti ve faktorové analytických studiích a bez vlastní praktické zkušenosti.

3. Výběr a konstrukce testů¹⁾

Výběr a konstrukce testů je pravděpodobně nejdůležitější, nejvíce roz-

1) Připomeňme, že slovem "test" rozumíme jakoukoli empirickou proměnnou, tedy například dotazníkovou položku, kožní odpor, měsíční příjem atd.

hodující fázi faktorového výzkumu. Nikoli sebrání velkého množství dat, nikoli rozsáhlé strojní výpočty budící dojem vědeckosti, nýbrž intelektuální práce, která proběhne dříve, než se roztočí cyklostil nebo začnou připravovat laboratorní zařízení - tato intelektuální příprava je jádrem faktorového výzkumu. Pro tuto práci samozřejmě nelze dát univerzální návod. Je možno uvést jen některé obecné zásady a zkušenosti.

(a) Náhodný výběr

Myšlenka náhodného výběru testů vychází z představy, že oblast, v níž chceme provést faktorovou analýzu, je analogická s plochou¹⁾, kterou je možno "stejněměrně pokrýt" testy. Této stejnoměrné hustoty testů, pokrývajících danou oblast, je možno dosáhnout ex post, když už máme danou oblast prozkoumanou. Avšak náhodným výběrem se k této stejnoměrnosti přibližujeme. Faktorováním náhodně vybraného vzorku z nekonečného (někdy také konečného) množství testů, jež jsou pro danou oblast myslitelné, dojdeme k faktorům, jež budou tuto oblast dobře vystihovat.

Z uvedeného předpokladu se často vychází. "Náhodný výběr" se přitom provádí často jako namátkový výběr: autor studie vybírá z existujících testů nebo konstruuje nové podle toho, jak ho napadnou (např. dotazníkové položky, posuzovací škály atd.).

Namátkový výběr je ovlivňován implicitními hypotézami. To nevadí, jsou-li tyto hypotézy hodnotné. Je ovšem lépe převést pokud možno implicitní hypotézy na explicitní, formulovat je co nej přesněji a podle nich testy systematicky vybírat. Pokud se nepodaří hypotézy explicitně vyjádřit, je radno zlepšit namátkový výběr tím, že požádáme o spolupráci několik expertů a využijeme jejich nápadů.

Náhodný výběr testů je z obecně metodologického hlediska méněcenný a pokud můžeme, vyhneme se mu.

(b) "Markers"

Pro termín "marker" je těžko najít vhodný český ekvivalent. Rozumí se jím test, jehož faktorové složení je známé a pokud možno jednoduché. Zařadí-li dva nebo více markers do korelační matice, můžeme se spolehnout, že získáme příslušný faktor. Je velmi výhodné mít v korelační matici spolehlivě reprezentovány nejdůležitější faktory, které byly v dané oblasti nebo na je-

2) Důsledněji bychom mluvili o mnohazměrném prostoru.

jím pomezi již pevně stanoveny (např. extraverte při výzkumu osobnosti). Je-li tento faktor syčen i dalšími testy než jsou jeho markery, převedli jsme část neznámého na známé, část variance je vysvětlena.

Příkladem výzkumu, kdy bychom markery jistě doporučili, je faktorová analýza Wechslerova testu nebo položek nového osobnostního dotazníku. Bez nich by interpretace faktorů byla nejistá. Také při rotaci se o ně můžeme opřít (poslouží zejména jako pokusné vektory a k bezpečnějšímu stanovení nadrovin při vizuální rotaci).

(c) Výběr testů z hlediska vyloučení nebo izolace artefaktů

Ve faktorovém výzkumu věnujeme velkou pozornost tomu, abychom neprodukovali artefakty, zdánlivé faktory, jež mají původ v nepodstatných okolnostech výzkumu. Dáme příklad zvláště primitivní. Předpokládá se, že Bourdonův škrtačí test měří vytrvalost. Rozhodneme-li se provést faktorovou analýzu, jejímž cílem bude nalezení faktoru vytrvalosti, mohli bychom zařadit do korelační matice několik škrtačích testů, abychom z jejich korelací odvodili tento faktor. Ze škrtačích testů skutečně "vznikne" faktor, ten však bude daleko spíše faktorem schopnosti zvané "percepční rychlost" než faktorem vytrvalosti. Teprve zařadíme-li testy vytrvalosti různého druhu, z nichž většina nebude souviset s faktorem percepční rychlosti, můžeme doufat, že dostaneme skutečný faktor vytrvalosti.

Někdy se snažíme vyloučit nežádoucí složku variance způsobem skórování. Například v Bourdonově testu bychom mohli za skóre vytrvalosti považovat rozdíl mezi druhou a první polovinou testu (zda proband odolává únavě a jeho výkon neklesá, nýbrž naopak stoupá). Opět musíme čelit námitce, že v tomto případě měříme spíše učení. Tomu bychom mohli částečně čelit tím, že bychom nejdříve provedli delší zácvič, abychom se dostali na plató křivky učení a pak teprve bychom neklesání výkonu v čase považovali za ukazatel vytrvalosti. Jiným příkladem je způsob skórování používaný odedávna u ergografu: vyzkoušíme nejdříve, jakou maximální sílu dokáže proband tahem překonat a pak mu dáme úlohu překonávat opakovaně poloviční sílu.

(d) Konstrukce testů pro faktorovou analýzu

Jestliže konstruuje testy speciálně pro faktorovou analýzu, dbáme především o to, aby byly časově úsporné. Faktorová studie má představovat široký záběr, pak teprve se plně uplatní síla faktorové analýzy. Proto platí, že raději použijeme většího množství krátkých, méně spolehlivých testů než menšího množství spolehlivějších. Účelem faktorové analýzy totiž

není přesné posouzení jednotlivých případů, ale probádání vztahů mezi testy (resp. aspekty skutečnosti, jež testy reprezentují). Méně spolehlivý test bude mít zajisté nižší faktorové zátěže, ale spolehlivost těchto zátěží můžeme libovolně zvyšovat zvětšováním počtu probandů. Zde nejsme (aspoň bychom neměli být) omezeni. Na druhé straně čas testování každého jedince je omezen, ať už jeho ochotou či únavou atd.

Pokud můžeme, vyhýbáme se faktorování experimentálně závislých testů (například větší množství parametrů odvozených z téže křivky krevního tlaku). Praxe ukazuje, že to často vede k artefaktům.

Zvláštním případem experimentálně závislých skóre jsou ipsativní skóre (tj. jedno skóre může být větší pouze na úkor jiných skóre - příkladem může být Allport-Vernonův dotazník hodnot). Zde záleží na tom, jak silný je ipsatizační efekt. Pokud je ipsatizací vzájemně propojeno méně než 5 skóre, je faktorování asi jistě nesmyslné.

(e) Problém faktorování položek

Velké množství testů lze snadno získat tak, že za testy považujeme jednotlivé položky, například otázky povahového dotazníku nebo úkoly testu schopnosti.

Faktorování úloh z testů schopností je zajímavé ve velmi speciálních případech (např. sledování vlivu obtížnosti na faktorové složení položky), zpravidla je účelnější faktorovat testy skládající se aspoň z několika úloh.

Položky povahových dotazníků se - z logického hlediska - hodí k faktorování velmi dobře. Potíž je v tom, že bývají dichotomické (Ano - Ne), což často vede ke zkreslení korelačního koeficientu a v důsledku toho i ke zkreslení faktorů¹⁾. Nespolehlivost položek v psychometrickém smyslu by neměla být překážkou, protože ji lze kompenzovat množstvím probandů.

D) Strategie faktorového výzkumu

Faktorový projekt může být značně rozsáhlý a jeho provedení časově náročné. Přesto se na něj díváme jen jako na jeden krok v soustavném poznávání dané oblasti. Jediný výzkum neznamena nic.

1) Na tuto potíž narážíme ovšem i při jiných dichotomických testech, jak jsme se o nich zmínili na str. 105. Plně uspokojivé řešení nebylo dosud nalezeno.

Z tohoto hlediska se ptáme, jak by měly faktorové projekty na sebe navazovat, případně jak by se měly kombinovat s jinými, nefaktorovými projekty. To nás zajímá i při provádění určitého výzkumu: jak zajistit jeho návaznost na jiné výzkumy?

1. Vzájemná návaznost faktorových výzkumů

Především je třeba, aby na sebe navzájem navazovaly faktorové výzkumy. Prozatím to bohužel zdaleka není samozřejmé. Dosavadní výsledky představují tříšť, ve které je obtížné se vyznat.

Problémem je například už pouhá replikace, zopakování výzkumů. Dochází k němu zřídka. Často je dokonce nemožné replikaci provést, protože autoři nepublikují celý postup sbírání dat in extenso a po několika letech bývá velmi obtížné získat přesný popis postupu od autorů samých. Bývá tomu tak pro množství proměnných. Přesný popis šedesáti testů včetně přesných instrukcí, údajů o technice snímání, o použití vzorku a nejrůznějších okolnostech představuje knihu o mnoha stránkách - knihu, která může zajímat jen málo čtenářů a proto není nikdy publikována. Avšak i kdyby byla publikována, honba většiny výzkumných pracovníků za originalitou by jim stejně zabránila v používání metod jiných autorů, aniž by je různým způsobem modifikovali. Disciplinované navazování na starší výzkumy je výjimkou i uvnitř většiny škol v psychologii osobnosti.

Pro nás je zvláště důležitá transkulturní replikace, tj. opakování výzkumů konaných v jiném kulturním a jazykovém prostředí. Devět desetin výzkumů konaných u nás v psychologii osobnosti by mělo být věnováno účelným transkulturním replikacím.

Většina faktorových výzkumů se koná na mladých dospělých. Ve Spojených státech to bývají studenti prvních ročníků vysoké školy. Problémem je pak platnost výsledků, tj. existence příslušných faktorů, v jiných věkových i sociálních skupinách, jinými slovy věková a sociální univerzálnost faktorů. Replikace faktorových výzkumů na odlišných vzorcích se provádí zřídka a ještě vzácněji s potřebnou soustavností.

Generalizace výsledků z různých studií, konaných na odlišných vzorcích, různými (často nedostatečně popsány) testy, s poněkud odlišnou technikou extrakce a rotace faktorů, je velmi obtížná a nedostatečně průkazná. Často můžeme pouze říci, že faktor stejně nebo podobně označený (ve slovní interpretaci) se vyskytuje u většího počtu, jiný u menšího počtu autorů. To je ovšem velká slabina dosavadního faktorového výzkumu.

Byly vypracovány různé statistické testy pro zjištění, do jaké míry je určitý faktor nalezený v jedné studii podobný jinému (snad stejně pojmenovanému) faktoru jiné studie. Podmínkou ovšem je, aby v obou studiích byl dostatečný počet shodných či aspoň velmi podobných testů. Nejznámější je Burtův kongruenční koeficient, podobný korelačnímu koeficientu:

$$r_c = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}} \quad (32)$$

Má-li být prokázána shodnost (identita) dvou faktorů z různých studií, je třeba, aby nejen sytily tytéž testy, ale také aby se shodovaly v tom, ktelé testy nesytí.

Nový faktorový projekt by měl vždy navazovat na podobné starší projekty, a to tak, aby došel pokud možno k již známým faktorům, aby přispěl k jejich hlubšímu poznání a aby k nim přidal nové, dosud neznámé nebo jen hypoteticky předpokládané faktory. To ovšem neznamena mechanické "přilepování" nových výsledků ke starým. Naopak. Správné je revidovat výsledky starších studií, a to zejména pokud jde o rotaci. Lze například znovu rotovat faktorové matice starších studií a faktorovou matici z vlastní nové studie, a to tak, aby-
chom dosáhli co nejlepši shody mezi faktory a co nejlepšiho kumulativního obrazu dané oblasti. Jasnost a přesvědčivost tohoto souhrnného obrazu je daleko důležitější než například optimální jednoduchá struktura uvnitř každé ze studií.

Způsobem naznačeným v předchozí odstavci se v poslední době začíná pracovat, což nepochybně znamená novou etapu faktorového výzkumu.

2. Návaznost faktorových a nefaktorových výzkumů

Donedávna zela mezi multivariačním výzkumem (reprezentovaným především faktorovou analýzou) a ostatními oblastmi výzkumu (laboratorní experiment, vývojová studie) hluboká propast. Dodnes je propojení těchto oblastí slabé. Možnost navazování nefaktorových výzkumů na faktorové a naopak je však velmi slibná.

(a) Navazování faktorových studií na nefaktorové

Autoři faktorových výzkumů odvozují své hypotézy - i když zatím jen sporadicky - ze závěrů experimentálních i vývojových studií. Například Eysenck navazuje na některé teorie učení, zejména na Hulla, a odvozuje pojem extraverte z individuálních rozdílů v podmiňování, resp. v dynamice vzruchu

a útlumu. Podobně pojem vývojové diferenciacce vedl řadu autorů ke srovnávání faktorového obrazu schopností na různých vývojových stupních.

(b) Navazování nefaktorových studií na faktorové

Pokud faktorová analýza plní poslání, jež jí přiřkl Thurstone, tj. především mapovat dosud neznámé oblasti, jsou její výsledky ideálním materiálem pro další, nefaktorový výzkum, ať základní či aplikovaný.

Genetické studie jsou často dezorientovány tím, že se badatelé nemohou dohodnout, které rysy by měli ve vývoji sledovat. Například je logické sledovat od raného dětství vývoj podstatných vlastností zjistitelných v dospělosti. K tomu ovšem musíme vědět, které jsou podstatné vlastnosti - což je otázka faktorové analýzy. Do této souvislosti patří i studie dědičnosti a prostředí. Zkoumáme podíl dědičnosti - ale ve kterých vlastnostech? Zde musí dát odpověď multivariační výzkum.

Experimentální výzkumy se často navzájem rozcházejí, protože jejich autoři používají poněkud odlišných závislých proměnných. Značného zlepšení je možno dosáhnout, použije-li se v experimentu nikoli jediné empirické závislé proměnné, nýbrž několika empirických závislých proměnných, o nichž je z faktorového výzkumu známo, že jsou syceny tímž faktorem. Pak je závislou proměnnou faktor. O něco složitější úvahu by vyžadovalo objasnění důvodů, pro které je záhodno používat faktorových podnětů, resp. manipulovat faktory nezávisle proměnných, nikoli jen jednotlivými empirickými nezávisle proměnnými.

Terapie duševních poruch, psychagogika i výchova by měly mít stanoven cíl v termínech faktorů duševního zdraví, povahových a charakterových rysů. - Sledováním této úvahy bychom se dostali k problému, zda faktory změny jsou tytéž jako faktory statického popisu, který je zcela nevyřešen. Je možné, že faktory statického popisu by měly daleko více než dosud vycházet z dynamiky možných změn - čímž se dostáváme opět k navazování faktorových výzkumů na nefaktorové.

Z á v ě r e m

Faktorová analýza je nesnadná metoda. Zejména je obtížné proniknout do její logiky a naučit se jí používat. V těchto skriptech - zvláště v jejich poslední části - jsme považovali za nutné poukázat na mnohá úskalí, na nichž může ztroskotat i projekt sestavený a provedený s velkou poctivostí a pílí, někdy i se značným důmyslem. To by ovšem nemělo odradit adepty faktorové analýzy od používání této jedinečné, elegantní a perspektivně svrchovaně slibné metody. Jsme hluboce přesvědčeni, že plánovitě, teoreticky podložené a tvořivé uplatňování faktorové analýzy povede v nejbližších letech ke skutečným objevům jak v psychologii osobnosti a jiných oblastech psychologie, tak i v dalších vědních oborech.

Významy soustavně používaných symbolů

- A ... nerotovaná faktorová matice
P ... rotovaná faktorová matice
V ... matice referenčních vektorů při kosé rotaci
R ... matice korelací mezi testy
... matice kosinů úhlů mezi faktory (korelací mezi faktory)
... matice kosinů úhlů mezi referenčními vektory (korelací mezi ref. vektory)
T ... transformační matice vedoucí od nerotované matice A k rotované matici P, v případě kosé rotace k faktorové struktuře S
... transformační matice vedoucí od nerotované matice A k rotované matici V
F ... matice ideálních faktorových skóre
 $\bar{F}$... matice odhadnutých faktorových skóre
Z ... matice testových skóre
 z_j .. obvyklé značení pro test v obecných rovnicích
 a_j .. obvyklé značení pro zátěž společného faktoru
 r_{jj} . reliabilita
 h, h^2 ... délka testového vektoru v prostoru společných faktorů; komunalita jako její druhá mocnina
N ... počet osob
n ... počet testů
m ... počet faktorů

Komentovaná bibliografie

1. Thurstone, L.L., Multiple factor analysis. Chicago: University of Chicago Press, 1947. Klasické podání faktorové analýzy. Skvělá učebnice pokud jde o seznámení s faktorovým modelem a smyslem faktorové analýzy. Ve vlastní technice faktorování je tato kniha - zvláště vzhledem k samočinným počítačům - zastaralá.
2. Harman, H.H., Modern factor analysis. Chicago: University of Chicago Press, 1967 /2. vydání/. Reprezentativní učebnice, obšírná a úplná pokud jde o matematickou stránku faktorové analýzy. Interpretační a obecně metodologická problematika je málo zastoupena.
3. Cattell, R.B., Factor analysis. New York: Harper, 1952. Relativně stručný a srozumitelný úvodní text. Rozvíjí interpretační stránku faktorové analýzy, strategii faktorového výzkumu. Nepřihlíží ještě k používání samočinných počítačů.
4. Überla, K., Faktorenanalyse. Berlin: Springer, 1968. Vyhovující moderní německá učebnice, vycházející ze současné praxe Cattellovy laboratoře.
5. Horst, P., Factor analysis of data matrices. New York: Holt, 1965. Obšírná učebnice zdůrazňující algebraický přístup k faktorové analýze. Zvláště užitečná jako východisko k sestavování programů pro samočinné počítače.
6. Cattell, R. B. (Ed.), Handbook of multivariate experimental psychology. Chicago: Rand McNally, 1966. Sborník podávající středně náročnou formou přehled metodologických problémů i výsledků faktorové analýzy a příbuzných metod.
7. Guilford, J.P., Personality. New York: McGraw-Hill, 1959. Učebnice, která srozumitelně a přehledně shrnuje výsledky faktorové analýzy v psychologii osobnosti do doby svého vydání.
8. Guilford, J. P., The nature of human intelligence. New York: McGraw-Hill, 1967. Klasifikační systém rozumových schopností založený na mnohaletém soustavném faktorovém výzkumu rozvinutého intelektu.
9. Tardy, Vl., Psychologie osobnosti. Praha: SPN, 1964. Podává mimo jiné množství poznatků o statistické struktuře osobnosti, získaných faktorovou analýzou a jinými metodami rozboru korelací. Referuje také o evropských výzkumech. Množství kritických poznámek.
10. Říčan, P., Dějiny faktorových teorií osobnosti. Kapitola ve skriptech F. Jiráňka a kol., Dějiny psychologie XX. století, II, Praha: SPN, 1969. Kritický nárys vývoje faktorové analýzy jako výzkumného směru v psychologii osobnosti.

D o d a t e k

Nejdůležitější maticové operace ve faktorové analýze

Učebnice faktorové analýzy obvykle vyžadují znalost základů maticové algebry. Naše Prolegomena jsou určena čtenáři, který maticovou algebru nezná. Aby si však dovedl něco představit pod základními faktorovými formulami a mohl procvičit rotaci faktorů, je třeba, aby se seznámil - aspoň zcela povrchně - s některými elementárními maticovými vztahy a operacemi.

Matice

Maticí nazýváme soustavu čísel uspořádaných do pravouhlého schématu; např.:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Tato matice obsahuje 15 čísel v pěti řádcích a třech sloupcích. Nazvali bychom ji maticí typu (5×3) . Číslům 0, 3, 1, 2, ... říkáme prvky matice.

Obecně zapisujeme matici typu $(m \times n)$, tj. matici o m řádcích a n sloupcích, takto:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Dvojitý index slouží k rozlišení řádků a sloupců - např. a_{jk} je prvek z průsečíku j -tého řádku a k -tého sloupce. První index j je tedy zpravidla řádkový ($j = 1, 2, \dots, m$), druhý k sloupcový ($k = 1, 2, \dots, n$). Místo dvojitých čar užíváme někdy hranaté závorky.

Je-li $m = n$, tj. má-li matice stejný počet řádků a sloupců, mluvíme o čtvercové matici n -tého řádu.

Vektor

je speciální případ matice; je to buď jediný řádek nebo jediný sloupec. Matici typu $(1 \times n)$ označujeme jako řádkový vektor, matici typu $(n \times 1)$, jako vektor sloupcový. Např.

$$[2 \quad -3 \quad 0 \quad 1 \quad 0,4]$$

je řádkový vektor,

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 12 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

vektor sloupcový.

Rovnost matic

Matice A a B jsou si rovny ($A = B$), jestliže je každý prvek matice A roven odpovídajícímu prvku matice B, tj. je-li $a_{jk} = b_{jk}$ pro všechny hodnoty indexů j a k.

Z definice je zřejmé, že o rovnosti je možno mluvit jen u matic téhož typu.

Matice transponovaná

Matice, která je z matice A typu $(m \times n)$ odvozena záměnou řádků a sloupců, označujeme A' a nazýváme ji maticí transponovanou k matici A. Matice A' je typu $(n \times m)$.

Např. transpozicí matice ze str. 115 vznikne tato matice typu (3×5) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Transpozicí řádkového vektoru vznikne vektor sloupcový, ze sloupcového řádkový.

Symetrická matice

Matice je symetrická, je-li rovna matici, která z ní vznikne transponováním, tj. nezmění-li se při záměně řádků a sloupců. Protože rovné si mohou

být jen matice téhož typu a při transponování se typ matice v obecném případě mění, mohou být symetrické jen matice čtvercové.

Symetrické jsou např. korelační matice; platí pro ně, že $R = R'$. (Při transponování zůstanou na místě hodnoty r_{jj} a pro $j \neq k$ platí $r_{jk} = r_{kj}$).

Speciálním případem symetrické matice je matice diagonální. Její prvky jsou pro $j \neq k$ rovny nule; jen prvky se stejným řádkovým a sloupcovým indexem, tj. prvky v tzv. hlavní diagonále, mohou být nenulové.

Příklad diagonální matice:

$$\begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Součet a rozdíl matic

Sčítat a odčítat můžeme jenom matice téhož typu. Slučování se provádí po prvcích: každý z elementů součtu, resp. rozdílu matic A a B je součtem, resp. rozdílem odpovídajících si prvků matic A a B. Platí tedy

$c_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$, resp. $c_{jk} = a_{jk} - b_{jk}$ pro všechny hodnoty indexů j a k.

Např.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Pro slučování matic platí zákony obvyklé algebry. Rolí nuly, tj. čísla, jehož přičtení či odečtení nemění hodnotu prvního členu, zde hraje nulová matice 0, jejíž prvky jsou všechny rovny nule. Platí tedy $A + 0 = A - 0 = A$.

Násobení matic

Při násobení dvou matic se - zjednodušeně řečeno - násobí řádky první matice sloupci druhé matice. Přesněji: prvek z j-tého řádku a k-tého sloupce matice $C = A \cdot B$ je roven součtu součinů odpovídajících si prvků v j-tém řádku A a v k-tém sloupci B:

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \dots + a_{jn}b_{nk}$$

Po několikerém použití se toto pravidlo snadno zapamatuje.

Např.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 & -8 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -9 & 17 & 3 & -11 \\ 3 & 3 & 8 & 13 \end{vmatrix}$$

První prvek (v prvním řádku a sloupci) jsme dostali takto:

$$0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 2,$$

prvek ve čtvrtém řádku a třetím sloupci:

$$2 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 3$$

atp.

Maticové násobení $C = AB$ lze provádět jen tehdy, je-li počet sloupců matice A roven počtu řádků matice B; různě dlouhé řádky A a sloupce B bychom totiž uvedeným způsobem vůbec nemohli kombinovat.

V součinu, který jsme zvolili za příklad, jsme násobili matice typu (5×3) a (3×4) . Jako výsledek jsme dostali matici typu (5×4) . Schematicky to můžeme napsat takto:

$$(5 \times 3) \cdot (3 \times 4) \rightarrow (5 \times 4).$$

Společný rozměr (počet sloupců A = 3 = počet řádků B) při násobení jakoby zmizí; rozměry součinu jsou dány zbývajícimi, okrajovými údaji o typech obou násobených matic. Platí to obecně: je-li první matice typu $(m \times n)$ a druhá typu $(n \times r)$, součin je typu $(m \times r)$.

Už z toho je vidět, že násobení matic není komutativní, že obecně neplatí $AB = BA$. Násobení v opačném sledu dokonce často není vůbec možno provést - např. u našeho příkladu to nejde, protože není splněn základní předpoklad: počet sloupců matice, která by byla nyní první (tj. 4), nesouhlasí s počtem řádků matice, která by teď byla druhá (5). U maticového součinu je tedy - alespoň tam, kde by mohlo dojít k záměně - nutno uvádět pořadí, v jakém mají být matice násobeny. Zdůrazňuje se to i slovně: např. pro součin AB říkáme, že matice A je násobena zprava maticí B nebo že B je násobena zleva maticí A.

Podobně jako existuje analogie nuly při slučování matic, má i maticové násobení matici, která hraje úlohu jednotkového prvku. Jde o tzv. jednotkovou matici (anglicky "identity matrix") značenou obvykle I. Je to diagonální matice s diagonálními prvky rovnými jedné, tj. matice

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Pro jakoukoliv matici A a jednotkové matice vhodného řádu platí $AI = IA = A$.

Ověřte si sami, že např.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transpozice součinu dvou matic

Podobně snadno se můžeme přesvědčit, že platí

$$(AB)' = B'A'.$$

Vlastně stačí si uvědomit, že při násobení transponovaných matic $B'A'$ násobíme řádky matice B' a sloupce matice A' , tedy sloupce B a řádky A . A to je - až na záměnu indexů - totéž, jako při násobení netransponovaných matic AB . Ani obecný důkaz uvedené rovnosti není obtížný, ale spokojíme se s demonstrací na numerickém příkladu. Na str. 118 jsme násobili dvě matice, výsledkem byla matice typu (5×4) . Přesvědčte se, že při změně pořadí a transpozici obou činitelů dostaneme jako součin matici typu (4×5) , která je transpozicí výsledku ze str. 118 :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 & -9 & 3 \\ 10 & 8 & 1 & 17 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 8 \\ -8 & 4 & 1 & -11 & 13 \end{vmatrix}$$

Násobení matice číslem

Součin matice A s číslem c je matice cA , která vznikne z A tak, že každý její prvek násobíme číslem c . Např.

$$0,5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1,5 & 1 & 0 & 3 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & -0,5 & 0 \end{vmatrix}$$

Násobení vektorů

Vektory jsme definovali jako speciální případ matic. I jejich vzájemné násobení probíhá podle týchž pravidel jako násobení matic. Zmiňujeme se o něm zvlášť jenom proto, abychom (v podstatě nadbytečně) upozornili na dva typy násobení vektorů, které jsou často odlišovány i slovně:

a) Skalární součin je součinem řádkového vektoru se sloupcovým, tj. součinem matice typu $(1 \times n)$ s maticí typu $(n \times 1)$. Výsledkem je matice (1×1) , tj. číslo. Zvykneme-li si označovat malými písmeny bez čárky zásadně sloupcové vektory, pak skalární součin vektorů x a y zapíšeme jako

$$x'y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

Tímto způsobem můžeme násobit jen stejně "dlouhé" vektory.

b) Vektorový součin je součinem sloupcového a řádkového vektoru, tj. součinem matice typu $(m \times 1)$ a matice typu $(1 \times n)$. Výsledkem je matice typu $(m \times n)$:

$$x y' = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_my_1 & x_my_2 & \dots & x_my_n \end{vmatrix}$$

Normalizace vektorů

Při rotaci faktorů často potřebujeme normalizovat sloupce transformační matice. Ty si můžeme představit jako sloupcové vektory. (Matici typu $(m \times n)$ lze chápat jako složenou z n sloupcových nebo m řádkových vektorů.)

Vektor je normalizován tehdy, když se součet čtverců jeho prvků rovná jedné. Normalizace se provádí násobením vektoru konstantou, kterou obvykle k tomuto účelu počítáme. Pro vektor

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

tedy hledáme konstantu k tak, aby

$$\sum (ka_i)^2 = 1.$$

Odtud

$$k^2 \left(\sum a_i^2 \right) = 1$$

a tedy

$$k = \frac{1}{\sqrt{\sum a_i^2}}$$

Např. pro vektor $[0,4 \ 0,2 \ 0,1 \ 0,2]$ je $\sum a_i^2 = 0,25$ a tudíž $k = 2$.
Normalizovaný vektor je $[0,8 \ 0,4 \ 0,2 \ 0,4]$.

Ortogonalní matice

Transformační matice pro ortogonální transformaci má normalizované sloupce; kromě toho však má ještě další vlastnost: její sloupce jsou vzájemně ortogonální. Tím rozumíme, že skalární součin i -tého a k -tého sloupce je pro $i \neq k$ roven nule. (Pro $i = k$ je roven jedné; sloupce jsou normalizovány.)

Souhrnně můžeme obě tyto vlastnosti zapsat jako rovnost

$$T^T T = I.$$

Matici T , pro kterou platí uvedený vztah, nazýváme ortogonální maticí.

Determinanty

Determinantem (determinantem n -tého stupně) matice

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nazýváme číslo

$$|A| = \sum (-1)^F a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

kde se sčítá přes všechny permutace $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ čísel $1, 2, \dots, n$

a kde r udává počet inverzí v permutaci $(k_1, k_2, \dots, k_n)$; determinant značíme také takto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pokusíme se tuto "odstrašující" definici trochu objasnit. Permutace je každá uspořádaná n -tice utvořená z n různých prvků, v našem případě ze sloupcových indexů $1, 2, \dots, n$. Způsobů, jakými je možno seřadit čísla od 1 do n , je $n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$ (n faktoriál). A o číslech k_i, k_j v permutaci $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ se říká, že tvoří inverzi, je-li $i < j$ a $k_i > k_j$, tj. následuje-li menší číslo za větším. Všíme si ještě, že determinanty počítáme pouze pro čtvercové matice.

Víme tedy, že determinant je složen z $n!$ členů, z nichž každý obsahuje jeden prvek (přesněji: právě jeden prvek) z každého řádku a z každého sloupce. Znaménka těchto členů závisí na počtu inverzí v permutacích, tedy na tom, jaké je právě pořadí sloupcových indexů.

Obecný návod vyzkoušíme nejdříve na determinantu druhého stupně. Máme určit determinant matice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Víme, že bude složen ze dvou výrazů, protože $2! = 2 \cdot 1 = 2$. Pořadí řádkových indexů zůstává stále stejné, u sloupcových vystřídáme permutace $(1, 2)$ a $(2, 1)$. První člen můžeme hned napsat: $a_{11} a_{22}$. V pořadí sloupcových indexů zde není žádná inverze, člen $a_{11} a_{22}$ bude tedy mít kladné znaménko (jakékoliv číslo povýšeno na 0 je rovno 1, tedy $1 \cdot (-1)^0 = 1$). Druhá permutace $(2, 1)$ obsahuje jednu inverzi - větší číslo (2) předchází menší (1); člen $a_{12} a_{21}$ bude tedy mít záporné znaménko $/(-1)^1 = -1/$. Pro determinant druhého stupně jsme dostali:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Od součinu prvků v hlavní diagonále musíme pro výpočet determinantu odečíst součin zbývajících dvou prvků. Např.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$$

Determinant třetího stupně, tj. determinant matice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

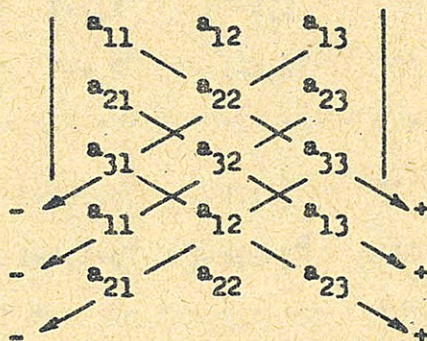
bude mít $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ členů. Nejdříve si napíšeme všech 6 permutací čísel 1, 2 a 3 a určíme počet inverzí a znaménka:

1	2	3	0	+
1	3	2	1	-
2	1	3	1	-
2	3	1	2	+
3	1	2	2	+
3	2	1	3	-

A teď už můžeme rovnou psát:

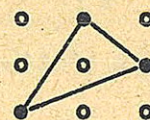
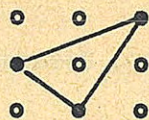
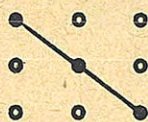
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Návod, jak si pamatovat jednotlivé členy tohoto determinantu, je možno znázornit různě; snad nejjednodušší je tzv. Sarrusovo pravidlo:

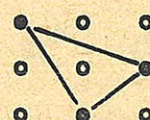
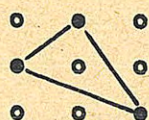
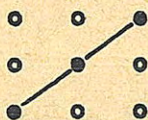


Pod determinant si přepíšeme (nebo si je představíme) znovu dva jeho první řádky. Na úhlopříčkách, jejichž směr odpovídá hlavní diagonále, leží členy s kladným znaménkem, ostatní členy (na úhlopříčkách zleva nahoře doprava dolů) mají znaménko minus. Snadno zapamatovatelné je také toto znázornění:

členy se znaménkem +



členy se znaménkem -



Příklad:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 0 = \\ = 2 - 2 + 0 - 4 + 3 - 0 = -1$$

Determinanty vyšších stupňů už nepočítáme přímo, ale převodem na determinanty nižších stupňů. Základem pro toto zjednodušení je možnost rozvoje determinantu podle některého řádku nebo sloupce; výpočet může být usnadněn i využitím dalších vlastností determinantů, s nimiž se ještě seznámíme.

Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce

a) Subdeterminant (minor) M_{jk} $(n-1)$ -ního stupně determinantu $|A|$ patří k prvku a_{jk} vznikne z determinantu $|A|$ vynecháním j -tého řádku a k -tého sloupce:

$$M_{jk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,k-1} & a_{j-1,k+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,k+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

b) Doplňkem A_{jk} prvku a_{jk} v determinantu $|A|$ nazýváme subdeterminant M_{jk} opatřený znaménkem $(-1)^{j+k}$. Je tedy

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$$

Znaménka se střídají podle tohoto schématu:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Např. subdeterminant patřící k prvku 3 (první řádek, druhý sloupec) determinantu

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

je determinant druhého stupně

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

k prvku 1 (první řádek, třetí sloupec) determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6.$$

Příslušné doplňky jsou $(-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1$ a $(-1)^{1+3} \cdot (-6) = -6$.

Každý determinant může být rozvinut podle prvků kteréhokoliv řádku či sloupce. Rozvoj podle j-tého řádku můžeme zapsat takto:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk},$$

kde A_{jk} je doplněk prvku a_{jk} .

Analogický je zápis rozvoje podle k-tého sloupce:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{jk} A_{jk}.$$

Platnost tohoto rozvoje (obecně ji nebudeme dokazovat) si můžeme ověřit na determinantu třetího stupně. Rozvíňme jej třeba podle prvního řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

Pokud tohoto pravidla užíváme pro výpočet determinantu, je výhodné vybrati si pro rozvoj řádek nebo sloupec, který obsahuje co nejvíc nulových prvků. Např. determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

rozvineme podle třetího sloupce:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \dots + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \\
= 1 \cdot (-2 - 4) + 1 \cdot (2 + 3) = -6 + 5 = -1$$

nebo podle druhého řádku:

$$\begin{aligned}
&= (-1) (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 2) + (2 - 4) \\
&= 1 - 2 = -1
\end{aligned}$$

Vlastnosti determinantů

1. Determinant se nezmění, zaměníme-li v něm řádky a sloupce; jinými slovy

$$|A| = |A'|$$

Všechna tvrzení, která dále vyslovíme pro sloupce determinantu, platí tedy i pro řádky a naopak.

2. Součtové pravidlo:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_2+b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(Totéž samozřejmě platí pro kterýkoli jiný sloupec nebo řádek.)

3. Determinant násobíme číslem c , násobíme-li tímto číslem všechny prvky jednoho sloupce, např.

$$c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ca_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. Determinant se rovná nule, obsahuje-li jeden jeho sloupec pouze nulové prvky.

5. Determinant změni znaménko, vyměníme-li dva jeho sloupce.

Všech pět uvedených vlastností se velmi snadno dokazuje; pro nás stačí, když si důvod jejich platnosti budeme umět zhruba představit.

Záměna řádků a sloupců v podstatě nic nemění na definici determinantu - je jedno, uvažujeme-li o permutacích sloupcových nebo řádkových indexů.

Platnost součtového pravidla je jasná z rozpisu $n!$ členů determinantu: v každém členu vystupuje jeden prvek z prvního (event. jiného) sloupce a pochopitelně platí např. že

$$(a_1+b_1)a_{22} \dots a_{nn} = a_1a_{22} \dots a_{nn} + b_1a_{22} \dots a_{nn}.$$

Velmi podobné je zdůvodnění pravidla o násobení determinantu číslem: také stačí uvažovat o každém z $n!$ členů.

Pro důkaz platnosti čtvrtého pravidla stačí představit si rozvoj determinantu právě podle toho řádku či sloupce, který obsahuje samé nuly.

Pokud jde o páté pravidlo: výměna dvou sloupců změni počet inverzí v každé permutaci sloupcových indexů vždy o jednu, proto se také změni znaménko každého členu.

Pět vlastností, kterým na základě těchto úvah už můžeme věřit, umožní představit si, proč mají determinanty ještě tuto vlastnost:

6. Determinant se rovná nule, je-li jeden z jeho sloupců lineární kombinací ostatních (zejména obsahuje-li dva stejné sloupce).

Tato vlastnost je z hlediska faktorové analýzy důležitější než ostatní, proto zde uvedeme jeden z jejích možných jednoduchých důkazů: Determinant se dvěma stejnými sloupci můžeme rozložit na dva determinanty, z nichž každý obsahuje nulový sloupec. Např.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \\ a_3 & 0 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Analogicky můžeme dokázat, že determinant je roven nule, když je jeden sloupec násobkem jiného, jeden sloupec součtem dvou jiných a konečně i nejobecnější případ, kdy je jeden sloupec lineární kombinací ostatních.

Bezprostředním důsledkem vlastnosti 6 je toto tvrzení:

7. Determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu jeho sloupci lineární kombinaci ostatních.

Bez důkazu uvedeme ještě jednu vlastnost:

8. Determinant matice $C = AB$, která je součinem čtvercových matic téhož řádu, je roven součinu determinantů matic A, B :

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Hodnost matice

Matice A má hodnost r , obsahuje-li alespoň jeden nenulový subdeterminant r -tého stupně a všechny subdeterminanty stupně vyššího než r jsou rovny nule. Jinými slovy: hodnost matice je rovna stupni jejího největšího nenulového subdeterminantu.

Např. determinant matice

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

je roven nule:

$$\begin{aligned}
 B &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \\
 &= -1(20 + 2 + 75 - 5 - 30 - 20) - 1(10 + 3 - 45 - 10) = \\
 &= -42 + 42 = 0.
 \end{aligned}$$

Při výpočtu tohoto determinantu (rozvojem podle třetího řádku) jsme zjistili, že obsahuje nenulové subdeterminanty třetího stupně. Protože determinant $|B|$ je roven nule, má matice B hodnotu 3.

Hodnotu matice můžeme definovat také jinak: Vzpomeňme si, že determinant je roven nule, je-li jeden jeho řádek či sloupec lineární kombinací ostatních. (Je ovšem možné, že to platí pro víc řádků nebo sloupců.) U matice B z našeho příkladu můžeme např. čtvrtý řádek určit jako součet druhého řádku s trojnásobkem třetího. Je možno také říci, že determinant je roven nule, je-li některý jeho řádek či sloupec lineárně závislý na ostatních, čímž zatím myslíme, že je vytvořitelný jako nějaká jejich lineární kombinace.

Pojem lineární závislosti vektorů je ve faktorové analýze často užitečný; proto zde uvedeme i jeho formální definici:

Vektory $b_1, b_2, \dots, b_r$ jsou lineárně závislé, je-li možno vytvořit jejich lineární kombinaci

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_r b_r = 0,$$

jejíž koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ nejsou všechny nulové.

Je-li nenulový např. koeficient α_1 (alespoň jeden z koeficientů musí být různý od nuly), pak je možno napsat

$$b_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} b_2 - \dots - \frac{\alpha_r}{\alpha_1} b_r$$

Vektor b_1 je tedy lineární kombinací vektorů $b_2, \dots, b_r$.

Označíme-li řádkové vektory matice B b_1, b_2, b_3, b_4 , pak víme, že

$$b_4 = b_2 + 3b_3$$

a tudíž že

$$0 \cdot b_1 + b_2 + 3b_3 - b_4 = 0.$$

Je tedy možno vytvořit netriviální (tj. s koeficienty, které nejsou všechny rovny nule) lineární kombinací vektorů $b_1, \dots, b_4$, která je rovna nule, a vektory $b_1, \dots, b_4$ jsou lineárně závislé.

Lineární nezávislost je definována jako logický opak lineární závislosti: Vektory $b_1, b_2, \dots, b_r$ jsou lineárně nezávislé, jestliže neexistuje jejich netriviální lineární kombinace, která by byla rovna nule.

Hodnost matice můžeme po těchto úvahách definovat také jako maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků nebo sloupců.

Singulární matice

Čtvercovou matici nazýváme singulární, je-li její determinant roven nule. O matici, jejíž determinant je nenulový, mluvíme jako o regulární (nonsingulární).

Gramianovská matice

je symetrická matice, jejíž všechny hlavní subdeterminanty jsou větší nebo rovny nule (tzv. pozitivně semidefinitní matice).

Hlavními nazýváme tyto subdeterminanty:

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, |A|$$

O tomto typu matic se zmiňujeme proto, že k němu patří všechny korelační matice s jedničkami v hlavní diagonále. Odhady komunalit, které za jedničky dosazujeme při extrakci společných faktorů, jsou pokládány za vhodné jen tehdy, když je tato vlastnost zachována.

Inverzní matice

Ve faktorové analýze se často používá tzv. inverze matic. Je-li čtvercová matice A regulární, tj. je-li $|A| \neq 0$, pak k ní existuje (rovněž regulární) inverzní matice A^{-1} s touto vlastností:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

(kde I je jednotková matice).

Matici A^{-1} určíme takto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Až na dělitel $|A|$ tedy prvky inverzní matice odpovídají doplňkům symetrických prvků původní matice. Označíme-li obecný prvek matice A^{-1} symbolem a^{jk} , je

$$a^{jk} = \frac{A_{kj}}{|A|}$$

Hledejme např. inverzní matici k matici

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Víme už, že $|A| = -1$. Teď musíme postupně spočítat jednotlivé doplňky:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Můžeme tedy psát:

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -6 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & -5 \end{vmatrix}$$

(Přesvědčte se sami o správnosti výpočtu znásobením matice A maticí A^{-1} zprava i zleva.)

Inverzní matice k součinu dvou matic

Pro regulární čtvercové matice A, B platí

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Výsledky cvičení

(Pokud není řešení uvedeno, je odpověď na otázku přímo obsažena v textu.)

Str. 10

1. Předpoklad kvalitativní identity a předpoklad univerzálnosti vlastností.
(Při obecnější formulaci je první předpoklad obsažen v druhém.)
2. Ano, jako "kusy ovoce". (Uvažte analogii s bodovým systémem skórování testů!)
5. Ano.

Str. 17

1. $r = 0,505$.
4. $r = 0$.
6. Korelační koeficient by byl záporný, protože součet známek vyjadřuje neprospěch.
7. Korelace by byla přibližně nulová.

Str. 20

1. Body grafu leží na přímce $y = x$.
2. Ráznost - ukázněnost: $r = -0,12$; ráznost - odvaha: $r = 0,08$; ráznost - něžnost: $r = -0,08$; ukázněnost - odvaha: $r = -0,06$; ukázněnost - něžnost: $r = 0,06$; odvaha - něžnost: $r = -0,04$.
3. $a_1 = 0,949$; $a_2 = 0,632$; $a_3 = 0,316$.

Str. 27

3. Záporné standardní skóre znamená, že dotyčný jedinec je pod průměrem normativní skupiny.
4. Nejvíce se zmýlíme u jedinců, kteří mají v daných testech nejnižší a nejvyšší skóre.

$$1. r_{jk} = a_{j1}a_{k1} + a_{j1}a_{k2}r_{F_1F_2} + \dots + a_{j1}a_{km}r_{F_1F_m} + \\ + a_{j2}a_{k1}r_{F_1F_2} + a_{j2}a_{k2} + \dots + a_{j2}a_{km}r_{F_2F_m} + \\ \dots + a_{jm}a_{k1}r_{F_mF_1} + a_{jm}a_{k2}r_{F_mF_2} + \dots + a_{jm}a_{km}$$

$$2. r_{jk} = a_{j1}a_{k1}; \text{ např. } r_{12} = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42 \\ r_{13} = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21$$

(V diagonále tímto způsobem vypočítáme ovšem pouze komunality.)

3. Závisí na faktorových zátěžích daných dvou testů a na korelacích mezi všemi faktory.

$$1. s_j^2 = a_{j1}^2 + a_{j1}a_{j2}r_{F_1F_2} + \dots + a_{j1}a_{jm}r_{F_1F_m} + \\ + a_{j2}a_{j1}r_{F_2F_1} + a_{j2}^2 + \dots + a_{j2}a_{jm}r_{F_2F_m} + \\ \dots + a_{jm}a_{j1}r_{F_mF_1} + a_{jm}a_{j2}r_{F_mF_2} + \dots + a_{jm}^2$$

$$3. r_{11} = 0,3^2 + 0,7^2 = 0,09 + 0,49 = 0,58 = h_1^2 \\ r_{12} = 0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,18 + 0,28 = 0,45 \text{ atd.}$$

4. Specifické a chybové faktory nemají na korelace mezi testy vliv.

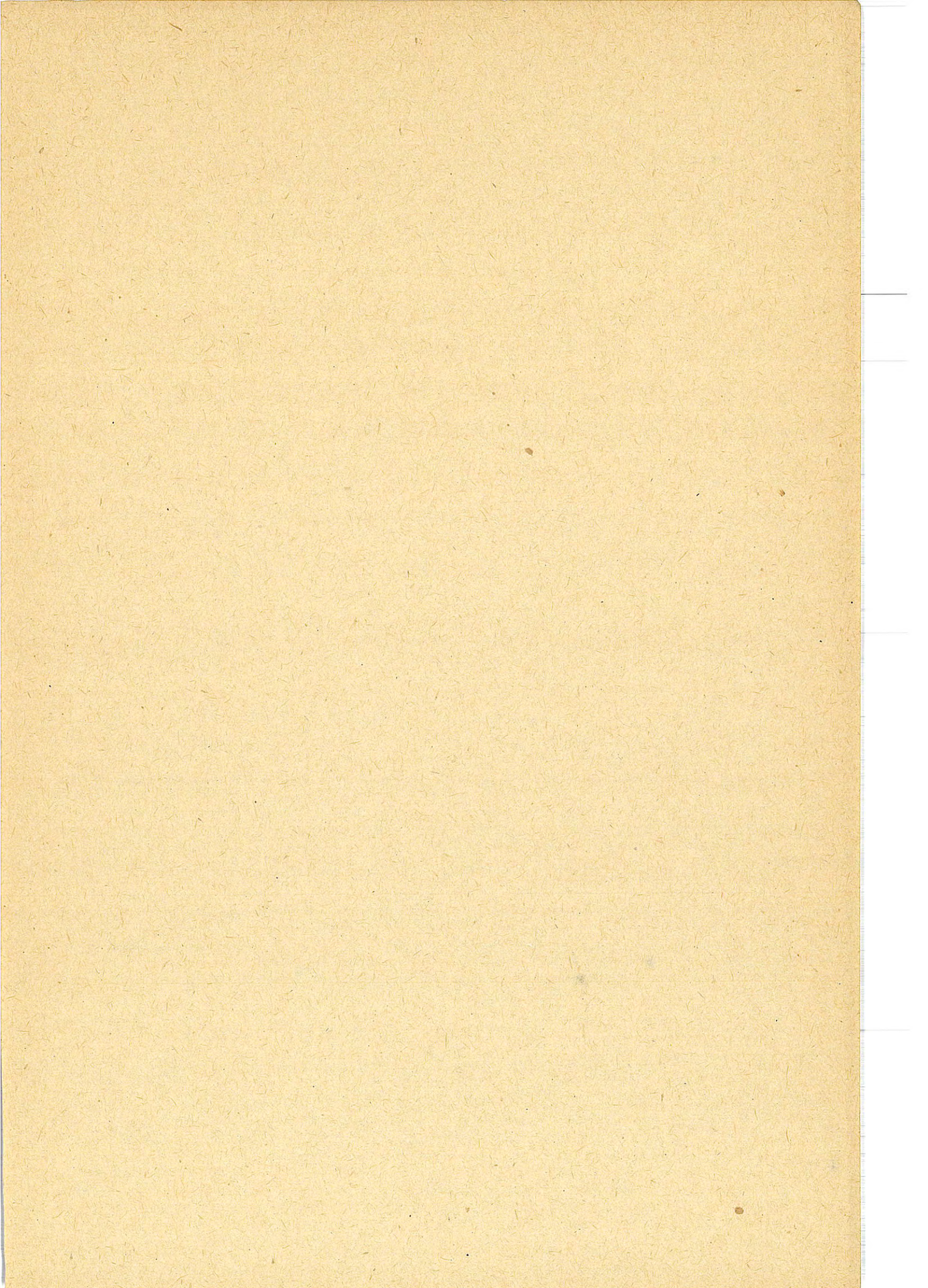
1. Je-li test sycen jediným faktorem.

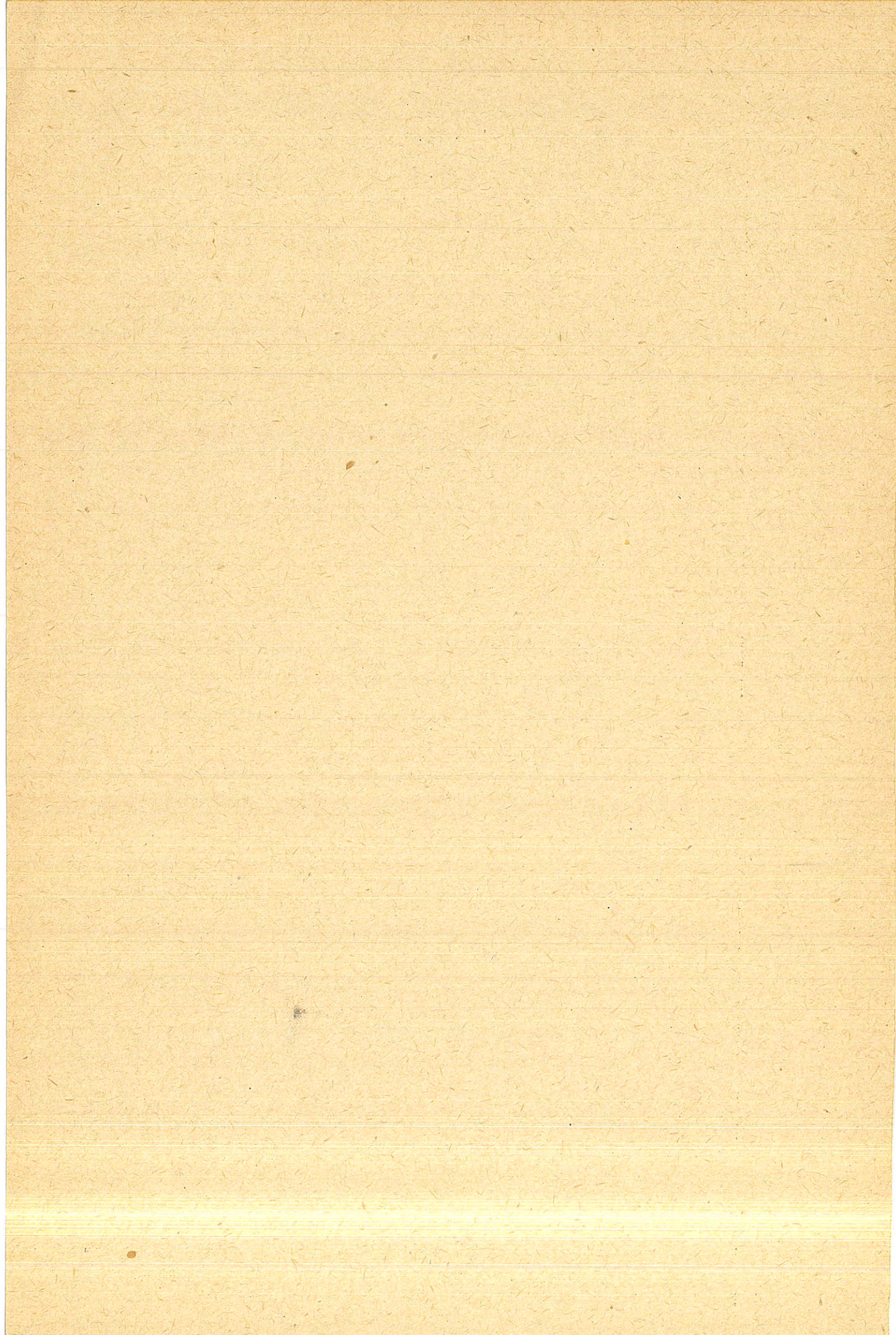
2. $r_{jF} = h_j h_{F \cos \alpha} = h_j \cos \alpha$; to je kolný průmět testu na faktor, který máme definován jako korelaci testu s faktorem.

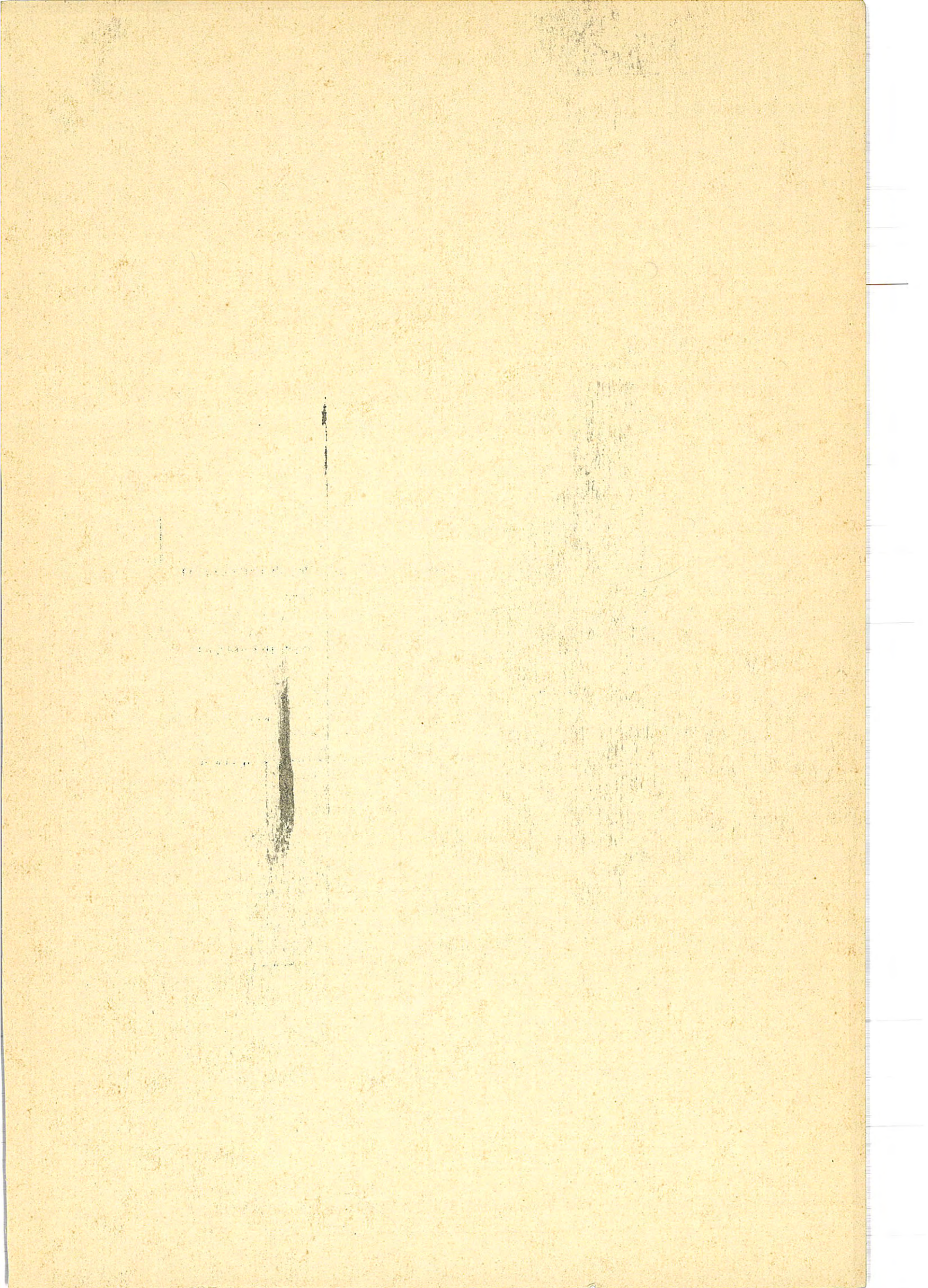
3. $r = 0,42$.

5. Je možno vyjít z faktorové matice se dvěma společnými faktory, kde jsou všechny komunality rovny jedné nebo z faktorové matice s jediným společným faktorem, kde jediný test má komunalitu nižší než jedna.

1. Ničím.
2. V nejistém určení kosostí, v malém počtu faktorů a ve velké abstraktnosti faktorů vyšších řádů.
3. Protože jsou syceny týmiž faktory vyššího řádu.
4. Části variance faktorů 1. řádu, které nelze přičíst faktorům 2. řádu.







Autor	PhDr. Pavel Říčan, CSc., RNDr. Olga Hampejsová
Název	Prolegomena k faktorové analýze
Vydavatel	Universita Karlova v Praze
Určeno	pro posluchače psychologie všech filosofických fakult
Vedoucí katedry	Doc. dr. Miloš Machač, DrSc.
Povoleno	rektorátem University Karlovy v Praze dne 6. 5. 1971, č. 3618/71 - C IX/2
Nakladatel	Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1
Číslo publikace	1011 - 7722
Vydání	první 1972
Náklad	1000 výtisků
Stran	136
AA / VA	9,17/9,90 103/23 832
Tematická skupina a podskupina	17/99
Tiskárna	Státní tiskárna, n. p., závod 6, Praha 1
Druh tisku	offset

17 - 090 - 72	CenaKčs 8,50
---------------	--------------

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou
úpravou v redakci nakladatelství